3.4 Basis und Dimension

K Körper, V K-VR.

Def 3.4.1: Ein Tupel $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ heißt <u>Basis</u> von V, wenn es l.o. ist$^{(\Delta)}$ und $\underbrace{V \text{ erzeugt}^{(0)}}$

d.h. $\langle v_i \mid i \in I\rangle_K = V$

Bem: (0) = jeder Vektor $w \in V$ lässt sich als Lin. Komb der v_i schreiben.

(Δ) = ..., und wenn man manche der v_i weglassen würde, würde (0) nicht mehr funktionieren.

Bsp 3.4.2: In K^n bilden die Vektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von K^n. $(e_1, \dots, e_n)$ nennt man die <u>Standardbasis</u> von K^n.

Bew: (0) Sei $w = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in K^n$. Dann ist $w = r_1 \cdot e_1 + r_2 \cdot e_2 + \dots + r_n \cdot e_n$

(Δ) Ann. es gilt $x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n = 0$

Erhalte LGS mit Koeff.-Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Also: Einzige Lin. Komb der e_i, die 0 ist, ist die triviale. □

Bsp: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \overset{?}{=} r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + ? \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für geeignetes „?"

Satz 3.4.3: Sei $(v_i)_i \in V^I$. Dann sind äquivalent:

(a) $(v_i)_i$ ist eine Basis von V.

(b) $(v_i)_i$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V
d.h. für $I' \subsetneq I$ gilt: $\langle v_i \mid i \in I' \rangle_K \neq V$

(c) $(v_i)_i$ sind ein maximales linear unabh. Tupel in V.
Für beliebige $v \in V$ ist
$\left((v_i)_{i\in I}, v\right) := (v_i)_{i \in I \cup \{i_0\}}$ l.a., wobei $i_0 \notin I$, $v_{i_0} := v$

(d) Für alle $w \in V$ existiert genau ein $(r_i)_i \in K^I$, s.d. fast alle $r_i = 0$ sind und

$$w = \sum_{i \in I} r_i v_i \quad \text{gilt.}$$

Bew: „(a) $\Leftrightarrow$ (b)": schon gesehen.

„(a) $\Leftrightarrow$ (c)": Seien $(v_i)_{i\in I}$ l.u.

z.z.: $(v_i)_{i\in I}$ erzeugt V $\Leftrightarrow$ $(v_i)_i$ ist maximal l.u.

„$\Rightarrow$": Sei $v \in V$. $v = \sum_{i\in I} r_i v_i$

$\Rightarrow 1 \cdot v - \sum_i r_i v_i = 0$ ist eine lin. Abh. von $\left((v_i)_{i\in I}, v\right)$.

„$\Leftarrow$" Wähle $v \in V$. Habe lin. Abhängigkeit

$$\sum_i r_i v_i + s \cdot v = 0$$

Da $(v_i)_{i\in I}$ l.u. sind, ist $s \neq 0$.

$$\Rightarrow v = -s^{-1} \cdot \sum_i r_i v_i$$

„(a) $\Leftrightarrow$ (d)": Sei $\langle v_i \mid i \in I \rangle_K = V$.

z.z.: Eindeutigkeit aus (d) $\Leftrightarrow$ $(v_i)_{i\in I}$ l.u.

„$\Leftarrow$": Annahme uneindeutig, d.h. ex. $w \in V$ s.d.

$$w = \sum_i r_i v_i = \sum_i s_i v_i,$$ so dass nicht $r_i = s_i$ für alle i gilt.

$$\Rightarrow \sum_i (r_i - s_i) \cdot v_i = 0$$ ist nicht-triv. Lin-komb.

↯ zu: $(v_i)_i$ l.u.

„$\Rightarrow$": Ann. ex lin. Abhängigkeit $\sum r_i v_i = 0$ nicht alle $r_i = 0$.

$$0 = \sum_i r_i v_i = \sum_i 0 \cdot v_i$$ ist uneindeutige Darst. von 0. ↯ zur Annahme. $\square$

Satz 3.4.4 (Basisergänzungssatz): Sind $I_0 \subseteq I$ und $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ so, dass $\langle v_i \mid i \in I\rangle = V$ und $(v_i)_{i\in I_0}$ l.u. sind, so existiert eine Basis von V der Form $(v_i)_{i\in I'}$ mit $I_0 \subseteq I' \subseteq I$.

(In dieser Vorlesung: Bew. nur, wenn I endl. ist.)

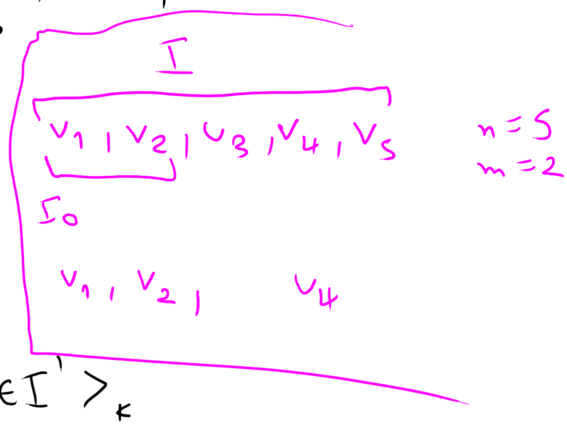
Bew: O.E. $I = \{1, \dots, n\}$, $I_0 = \{1, \dots, m\}$, $m \le n$.

$I' := \{ i \in I \mid v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle_K \}$

Dann ist $I_0 \subseteq I'$.

$(v_i)_{i\in I'}$ ist l.u. (nach 3.3.4)

$\langle v_i \mid i \in I'\rangle = \langle v_i \mid i \in I\rangle$. Allgemeiner gilt: $\langle v_1, \dots, v_i\rangle_K = \langle v_j \mid j \le i,\ j \in I'\rangle_K$



Per Induktion über i: • Ind. Anfang: $i=0$: ✓

• Ind. Schritt:

$\langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle_K = \langle v_j \mid j \le i-1,\ j \in I'\rangle_K$

Falls $v_i \in I'$:

$\langle v_1, \dots, v_i\rangle_K = \langle v_j \mid j \le i,\ j \in I'\rangle_K$

Falls $v_i \notin I'$: Dann ist $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle_K$

$\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_i\rangle_K = \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle_K = \langle v_j \mid j \le i,\ j \in I'\rangle_K$ $\square$

Korollar 3.4.5: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Bew. Wende 3.4.4 an auf $(v_i)_{i\in I} \in V^I$, wobei die v_i alle Vektoren aus

V sind. $I_0 = \emptyset$

Satz 3.4.6: Ist $(v_i)_i \in V^I$ l.u. und $(w_j)_j \in V^J$ ein Erzeugendensystem von V, so gilt: $\# I \leq \# J$.

Bew: Wir nehmen zunächst an, dass I endl. ist, o.E. $I = \{1, \dots, n\}$.

- Betrachte das Erzeugendensystem $\cancel{v_1}, v_2, \dots, v_n, (w_j)_{j \in J}$
- Nach 3.4.4 existiert $J_1 \subseteq J$, s.d. $v_2, \dots, v_n, (w_j)_{j \in J_1}$ eine Basis von V ist.
- $J_1 \neq \emptyset$, da $\langle v_2, \dots, v_n \rangle_K \subsetneq \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$.
- Betrachte $\underbrace{\cancel{v_2}, v_3, \dots, v_n, (w_j)_{j \in J_1}}_{\text{l.u.}}, (w_j)_{j \in J \setminus J_1}$
- Nach 3.4.4 ex. $J_2 \subseteq J \setminus J_1$ s.d. $v_3, \dots, v_n (w_j)_{j \in J_1}, (w_j)_{j \in J_2}$ eine Basis ist.
- $J_2 \neq \emptyset$, da $v_2 \notin \langle v_3, \dots, v_n, (w_j)_{j \in J_1} \rangle$
- Wiederhole. Erhalte auf diese Art

  $J_1, J_2, \dots, J_n \subseteq J$, paarweise disjunkt (d.h. $J_i \cap J_j = \emptyset$ für $i \neq j$)

  $\# J_i \geq 1$

  $\Rightarrow \# J \geq n$
- Falls I unendlich ist, kann das obige unendlich lang widerholt werden, d.h. erhalte paarweise disjunkte Mengen $J_i \subseteq J$ für $i \in \mathbb{N}$ mit $\# J_i = 1$

  $\Rightarrow J$ ist unendlich $\square$

Korollar 3.4.7: Alle Basen von V haben die gleiche Kardinalität.

Mit „Kardinalität von $(v_i)_{i \in I}$" ist die Kardinalität von I gemeint.

Bew: Seien $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_j)_{j \in J}$ Basen von V.

Da $(v_i)_i$ l.u. und $(w_j)_j$ Erz-System:

$\# I \leq \# J$

Da $(w_i)_i$ l.u. und $(v_j)_j$ Erz-System:

$\# J \leq \# I$

Also $\# J = \# I$. $\square$

Def. 3.4.8: Die <u>Dimension</u> eines Vektorraums V ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von V. Notation: <u>$\dim V$</u>.

„V ist n-dimensional" bedeutet: $\dim V = n$

Satz 3.4.9: Ist $U \subseteq V$ ein UVR, so ist $\dim U \leq \dim V$

Bew: Wähle eine Basis $u_1, \dots, u_m$ von U $(m = \dim U)$

Mit dem Basis-Ergänzungssatz erhalte eine Basis von V, die $u_1, \dots, u_m$ enthält. Also $\dim V \geq m$. $\square$