3.2 Untervektorräume

Sei K ein Körper und V ein K-VR.

Motivation:

- Vektoren = das, was man in ein LGS einsetzen kann
- Falls das LGS homogen ist: Lösungsmenge ist ein Untervektorraum.

Def. 3.2.1: Sei $U \subseteq V$. Ist $(U, \underbrace{+|_{U\times U}}_{\text{Vektor-Add von } V}, 0, \underbrace{\cdot|_{K\times U}}_{\text{Skalarmult von } V})$ ein Vektorraum, so nennt man U Untervektorraum von V.

UVR :=

Bem: Insbes wird also gefordert: Für $u, u' \in U$, $r \in K$:

- $u + u' \in U$
- $r \cdot u \in U$

Lemma 3.2.2: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein UVR gdw (genau dann wenn) gilt:

$$0 \in U \wedge \forall u, u' \in U : \forall r \in K : r\cdot u + u' \in U$$

Bew: „$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$" Habe:
- $\operatorname{im}(+|_{U\times U}) \subseteq U$ $\quad (r = 1)$
- $\operatorname{im}(\cdot|_{K\times U}) \subseteq U$ $\quad (u' = 0)$

Bleibt z.z.: (1) $(U, +|_{U\times U})$ ist ab. Grp.

(2) Axiome (a) – (d) aus 3.1.1.

Bew (2): Klar, da die Axiome in V gelten.

Bew (1):
- Assoz. und Kommut.: klar.
- $0 \in U$: ✓
- $\forall u \in U: -u \in U$: $\quad -u = (-1)\cdot u + 0 \in U$ $\quad\square$

Bsp. 3.2.3: Ist $\mathcal{L}$ ein homogenes LGS über K in n Variablen, so ist die Lösungsmenge M von $\mathcal{L}$ ein UVR von K^n.

Bew:
- Nach 1.1.4 (a) ist $0 \in M$.
- Sind $u, u' \in M$ und $r \in K$, so ist $r\cdot u \in M$ nach 1.1.4 (c) und dann $r\cdot u + u' \in M$ nach 1.1.4 (b).

Nach 3.2.2 folgt: M ist UVR.

Bsp:
- $V = \mathbb{R}^2$
- $U_1 = \{(0, r) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R} \subseteq V$ ist UVR
- $U_2 = \{(1, r) \mid r \in \mathbb{R}\} = \{1\} \times \mathbb{R}$

ist kein UVR, da $(0,0) \notin U_2$

- $U_3 = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$
  ist kein UVR, da $3\cdot(1,1) \notin U_3$

<u>Lemma 3.2.4</u>: Sind $U_i \subseteq V$ UVR für $i \in I$, so ist $\bigcap_{i\in I} U_i$ ein UVR.

<u>Bew</u>: Verwende 3.2.2: <u>z.z.</u>:

- <u>$0 \in \bigcap_{i\in I} U_i$</u>: klar, da $0 \in U_i$ für alle i
- <u>Sind $u, u' \in \bigcap_{i\in I} U_i$ und $r \in K$, so ist $ru + u' \in \bigcap_i U_i$</u>:

  Für jedes $i \in I$ gilt: $u \in U_i$, $u' \in U_i$, also $ru + u' \in U_i$ □

<u>Def. 3.2.5</u>: Sei $A \subseteq V$ beliebige Teilmenge. Die <u>Lineare Hülle</u> von A ist

auch <u>Span</u>, <u>Erzeugnis</u> von A

$$\langle A \rangle_K := \underbrace{\bigcap_{\substack{U \subseteq V \text{ UVR} \\ A \subseteq U}} U}$$

- ist UVR von V nach 3.2.4
- enthält A

$U_4 := \{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$, der U_3 enthält ... und sogar der kleinste

$\boxed{U_4 = \langle U_3 \rangle}$

Ist $U' = \langle A \rangle_K$, so sagt man auch: „A <u>erzeugt</u> U'",
„A ist Erzeugendensystem von U'"

Notation: Statt $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle_K$ schreibe auch $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$
Statt $\langle \{v \mid \dots\} \rangle_K$ schreibe auch $\langle v \mid \dots \rangle_K$.

<u>Bsp:</u> $A = \{(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Bei $\langle A \rangle_K$ betrachte: Bsp:
- $U = \mathbb{R}^3$
- $U = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$
- $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$
- $\vdots$

$\langle A \rangle_K$ ist der Schnitt davon

Betrachte nicht:
- $\{(1,0,0), (2,0,0)\}$ (ist kein UVR)
- $0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ist UVR, enthält aber nicht A)

Konv 0.7: (a) Sind I und A Mengen und ist $a_i \in A$ für alle $i \in I$, so ist $(a_i)_{i\in I}$ das „Tupel bestehend aus all den a_i".

Schreibe auch „$(a_i)_i$", wenn I aus dem Kontext klar ist.

Formal ist $(a_i)_{i\in I}$ die Abbildung von I nach A, die i auf a_i abbildet. (I nennt man in diesem Zusammenhang Indexmenge) Die Menge aller solcher Tupel schreiben wir A^I

(b) Ist $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$, so schreibe statt $(a_i)_{i\in I}$ auch $(a_i)_{m\leq i\leq n}$

(c) Sind $a_1, \ldots, a_n \in A$, so identifiziere $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$

Konv 3.2.6: Die Begriffe aus 3.2.5 werden auch auf Tupel $(v_i)_{i\in I} \in V^I$ angewandt: $\underbrace{\langle (v_i)_{i\in I}\rangle_K}_{\text{„Lineare Hülle von } (v_i)_{i\in I}\text{"}} := \langle \{v_i \mid i \in I\}\rangle_K$ etc.

Def. 3.2.7: Sei $(v_i)_i \in V^I$. Eine Linearkombination davon ist Vektor der Form

$$\sum_{i\in I} r_i \cdot v_i$$

für $r_i \in K$, wobei fast alle $r_i = 0$ sind.

Die Linearkombination heißt trivial, wenn alle $r_i = 0$ sind; sonst nicht-trivial.

Bsp: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $2 \cdot v_1 + v_2 + 3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist Lin.-Komb.
- $3 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Lin.-Komb. (nicht-trivial)

Satz 3.2.8: Sei $(v_i)_{i\in I} \in V^I$. Dann ist $\langle v_i \mid i \in I\rangle_K$ genau die Menge M aller Linear-Komb. von $(v_i)_{i\in I}$.

Bew: z.z.: (i) Jede Lin.-Komb. liegt in $\langle v_i \mid i \in I\rangle_K$

(ii) Jedes $w \in \langle v_i \mid i \in I\rangle_K$ ist eine Linkomb.

(i) Betrachte eine Lin-Komb. $w = \sum_{i \in I} r_i v_i$.

z.z: $w \in \langle v_i \mid i \in I \rangle$

Also z.z: Für jeden UVR $U \subseteq V$ mit $\{v_i \mid i \in I\} \subseteq U$ gilt: $w \in U$

Da $v_i \in U$ ist, ist auch $r_i v_i \in U$ für alle i, also auch $\sum_{i \in I} r_i v_i \in U$.

(ii) <u>Zeige:</u> M ist UVR von V (*)

Danach sind wir fertig, da $\{v_i \mid i \in I\} \subseteq M$. Nach Def. von $\langle v_i \mid i \in I \rangle_K$ impliziert „$w \in \langle \dots \rangle$" dann schon: $w \in M$.

<u>Bew von (*):</u>
- $0 \in M$: ✓
- $\sum_i r_i v_i, \sum_i s_i v_i \in M \overset{?}{\Rightarrow} \sum_i r_i v_i + \sum_i s_i v_i \in M$

$$\sum_i r_i v_i + \sum_i s_i v_i = \sum_i (r_i + s_i) \cdot v_i$$

□