3 Vektorräume

3.1. Definition

Bsp: $\mathbb{R}^3$ ist ein Vektorraum
$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$\rightsquigarrow \underline{a} + \underline{b}$ ... Gruppe
$r \in \mathbb{R} \rightsquigarrow r \cdot \underline{a} := (r \cdot a_1, r \cdot a_2, r \cdot a_3)$

Im Folgenden sei K ein Körper.

Def. 3.1.1: Ein K-Vektorraum (Vektorraum über K) ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0)$, zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot : K \times V \longrightarrow V$, so dass für alle $r, s \in K$, $u, v \in V$ gilt:

Skalar-Multiplikation

Null-Vektor

Vektoraddition

Vektorraum-Axiome

(a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$
(b) $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
(c) $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$
(d) $1 \cdot v = v$

Die Elemente von V nennt man Vektoren, die Elemente von K nennt man Skalare

Bsp 3.1.2: K^n ist ein K-Vektorraum ;VR mit komponentenweiser Skalarmultiplikation, d.h. $\underbrace{r}_{\in K} \cdot \underbrace{(a_1, \ldots, a_n)}_{\in K^n} := (r \cdot a_1, \ldots, r \cdot a_n)$.

Häufige Notation für Vektoren in K^n: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ (statt $(a_1, \ldots, a_n)$)

Bsp 3.1.3: $K[x]$ ist ein K-VR.
(Skalarmultiplikation: $\underbrace{r}_{\in K} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}_{\in K[x]} = \sum_{i=0}^{n} (r \cdot a_i) \cdot x^i$)

Satz 3.1.4: Ist V ein K-VR, $r \in K$, $v \in V$, so gilt:
(a) $r \cdot v = 0 \iff (r = 0 \vee v = 0)$
(b) $(-1) \cdot v = -v$

Bew: (a) „$\Leftarrow$" Falls $r=0$: $\quad 0\cdot v = (0+0)\cdot v \overset{(b)}{=} 0\cdot v + 0\cdot v$

$$\Rightarrow \quad 0 = 0\cdot v$$

Falls $v=0$: Analog.

„$\Rightarrow$" • Sei $r\cdot v = 0$. Annahme: $r \neq 0$.

• r^{-1} existiert (in K). Betrachte $r^{-1}\cdot(r\cdot v) \overset{(c)}{=} (r^{-1}\cdot r)\cdot v$

$$= 1\cdot v \overset{(d)}{=} v$$

$$r^{-1}\cdot(r\cdot v) = r^{-1}\cdot 0 = 0$$

$\square$

(b) z.z: $(-1)\cdot v + v \overset{?}{=} 0$

3.1.1 (d), (b)

$$(-1)\cdot v + 1\cdot v \overset{(b)}{=} (-1+1)\cdot v = 0\cdot v \overset{\substack{3.1.4\\(a)}}{=} 0$$

$\square$