2.3 Polynomringe

Bsp: Polynom: $f(x) = 3 + 4x + 5x^2 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^9$

$$= \underbrace{3}_{a_0}\cdot x^0 + \underbrace{4}_{a_1}\cdot x^1 + \underbrace{5}_{a_2} x^2 + \underbrace{(-4)}_{a_3}\cdot x^3 + \underbrace{0}_{a_4}\cdot x^4 + \ldots + \underbrace{0}_{a_8}\cdot x^8$$
$$+ \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{a_9}\cdot x^9 + \underbrace{0}_{a_{10}}\cdot x^{10} + \ldots$$

Def. 2.3.1: Sei R ein kommutativer Ring und x eine Variable.

(a) Ein Polynom in x über R ist ein Term der Form

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\cdot x^i$$

$f(x) \in \mathbb{R}[x]$

mit $a_i \in R$ für alle $i\in\mathbb{N}$, und wobei

„nur endl. Summen erlaubt" → fast alle $a_i = 0$ sind.

Die Menge aller Polynome in x über R wird mit $R[x]$ bezeichnet.

(b) Sind $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i,\ \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i \in R[x]$, so setze

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i\right) := \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i)\, x^i$$

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i\right) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j\cdot b_{i-j}\right)\cdot x^i$$

Motivation → $(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots)\cdot(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots)$

$= a_0b_0\cdot x^0 + a_0b_1x^1 + a_1b_0x^1 + \ldots$

$= a_0b_0x^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x^1 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$

Satz 2.3.2: Ist R ein kommut. Ring, so ist auch $R[x]$ ein kommut. Ring.

Bew: Alles nachrechnen

Bsp: Distributivität:

$$\left(\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i\right) + \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i\right)\right)\cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i x^i \overset{?}{=} \underbrace{\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum c_i x^i\right)}+\underbrace{\left(\sum b_i x^i\right)\cdot\left(\sum c_i x^i\right)}$$

x^i-Koeff. der linken Seite: $\sum_{j=0}^{i} (a_j + b_j)\cdot c_{i-j}$

x^i-Koeff der rechten Seite: $\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} + \sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j}$ ✓

Konv. 2.3.3: Zunächst ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$ nur eine Notation für ein Polynom.

Wir fassen jetzt Elemente $a \in R$ als Polynom $a\cdot x^0 + \sum_{i\geq 1} 0\cdot x^i \in R[x]$

auf. Wir schreiben auch x für das Polynom $0\cdot x^0 + 1\cdot x^1 + \sum_{i\geq 2} 0\cdot x^i$

$\in R[x]$. Dadurch wird $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$ eine Rechnung in $R[x]$.

Für den Rest von Abschnitt 2.3 sei R ein kommut. Ring.

Nachtrag:
R beliebiger Ring,
$a\in R$, $n\in\mathbb{N}$.
$a^n := \underbrace{a \cdot\dots\cdot a}_{n}$

Def 2.3.4: Sei $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i \in R[x]$.

(a) Existiert ein i, s.d. $a_i \neq 0$ ist, so nennt man das größte i mit $a_i \neq 0$ den Grad von f.

Notation dafür: $\deg f$

Ist $f = 0$ (also $\forall i: a_i = 0$), so setze $\deg f = -\infty$

- $f_1 = 3 + 4x + 5x^4 \boxed{+0x^5 + \dots}$
  $\deg f_1 = 4$
  Leitkoeff $= 5$
- $f_2 = 8 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \dots$
  $\deg f_2 = 0$
  Leitkoeff $= 8$

(b) f heißt konstant, wenn $\deg f \leq 0$

f heißt linear, wenn $\deg f \leq 1$

— " — quadratisch — " — $\deg f \leq 2$ ...

manchmal auch: $\deg f = 2$

(c) Ist $f \neq 0$, so heißt $a_{\deg f}$ der Leitkoeffizient von f.

Ist der Leitkoeffizient gleich 1, so nennt man f normiert.

Satz 2.3.5:
- Für $f, g \in R[x]$ gilt: $\deg(f\cdot g) \leq \deg f + \deg g$.
- Ist R ein Körper, so gilt sogar $\deg(f\cdot g) = \deg f + \deg g$.

Hierbei setzen wir: $(-\infty) + n := -\infty$, $(-\infty) + (-\infty) := -\infty$

Bew: Sei $f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ mit $m = \deg f$, $n = \deg g$

$f \neq 0$, $g \neq 0$; $\Downarrow$ $a_m \neq 0$, $\Downarrow$ $b_n \neq 0$

Der j-Koeff von $f\cdot g$ ist $\sum_{i=0}^{j} \underbrace{a_i}_{=0 \text{ falls } i>m} \underbrace{b_{j-i}}_{=0 \text{ falls } j-i>n}$

$a_i b_{j-i}$ kann nur dann $\neq 0$ sein, wenn $i \leq m$, $j-i \leq n$ ist

$\Rightarrow j = (j-i) + i \leq n + m$

Also: $\deg f \cdot g \leq n+m$

nach Bem 2.1.9 falls R ein Körper ist

Falls $j = m+n$: $\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} = \underset{\neq 0}{a_m} \cdot \underset{\neq 0}{b_n} \neq 0$

$\Downarrow$

$\deg f \cdot g = n+m$ □

Def. 2.3.6: Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x]$

(a) Das Polynom f definiert eine Fkt $f: R \longrightarrow R$, $b \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$

Wir verwenden die Konvention $0^0 = 1$

(b) Eine Nullstelle von f ist ein $b \in R$ s.d. $f(b) = 0$ ist.

Bsp: $f = 3x^0 + 5x^1 + x^2 = 3 + 5x + x^2$

$f(0) = 3$

Bem 2.3.7: Für $f, g \in R[x]$ und $b \in R$ gilt:

$$(f+g)(b) = f(b) + g(b)$$
$$(f \cdot g)(b) = f(b) \cdot g(b)$$

Bew: Nachrechnen. □

Satz 2.3.8: Sei $f \in R[x]$ und $b \in R$ eine Nullstelle von f. Dann lässt sich f schreiben als $f = g \cdot (x-b)$ für ein Polynom $g \in R[x]$.

NSt = Nullstelle

Bsp: $f(x) = x^4 - 1$, $b = 1$ ist NSt.

$f = (x-1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$

Bew: Mache Induktion über $n := \deg f$.

Induktions-Anfang:

Falls $n = -\infty$: Dann ist $f = 0$. Wähle $g = 0$

Falls $n = 0$: Dann ist $f = a_0$ für $a_0 \neq 0$. f hat keine NSt, also ist nichts zu beweisen.

Induktions-Schritt: "$n-1 \to n$"

Aus der Aussage für Polynome vom Grad $< n$ folgt die Aussage für n:

- Sei also $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_n \neq 0$, und sei b NSt von f.

- Setze $\tilde{f} := f - a_n x^n + a_n b^n$
$$= a_0 + a_n b^n + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + \cancel{a_n x^n - a_n x^n}$$
- Habe $\deg \tilde{f} < n$.
- Es gilt: $\tilde{f}(b) = f(b) - a_n b^n + a_n b^n = 0$
- Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\tilde{g} \in \mathbb{R}[X]$ so dass
$$\tilde{f} = \tilde{g} \cdot (x - b)$$
- Beh: $x^n - b^n \overset{?}{=} \underbrace{(x-b) \cdot \overbrace{\left(x^{n-1} \cdot b^0 + x^{n-2} b^1 + x^{n-3} \cdot b^2 + \dots + x^0 b^{n-1}\right)}^{h}}$
$$= x^n \cdot b^0 + x^{n-1} \cdot b^1 + \dots + x^1 \cdot b^{n-1}$$
$$- x^{n-1} \cdot b^1 - \dots - x^1 \cdot b^{n-1} - x^0 \cdot b^n$$
$$= x^n \cdot b^0 - x^0 \cdot b^n \qquad \square \text{ (Beh)}$$
- $f = \tilde{f} + a_n x^n - a_n b^n$
$$= \tilde{g} \cdot (x - b) + a_n \cdot \underbrace{(x^n - b^n)}_{= (x-b) \cdot h} = (x-b) \cdot \underbrace{(\tilde{g} + a_n \cdot h)}_{\overset{!}{=}\, g}$$

Bemerkung 0.6: Ist $A(n)$ eine Aussage über $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ (*)

aus: $\underbrace{A(0)}_{\text{I.A. = Induktionsanfang}} \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}: \left(\overbrace{\forall m < n: A(m)}^{\text{Induktionsannahme}} \Rightarrow A(n) \right)}_{\text{Induktionsschritt = I.S.}}$

Dies nennt man ein Beweis per (vollst.) Induktion über n von (*)

Korollar 2.3.9: Ist K ein Körper und $f \in K[x] \setminus \{0\}$, so hat f maximal $\deg f$ viele Nullstellen.

Bew: Mache Induktion über $\deg f$. D.h. $A(n) :=$ Korollar gilt für alle f mit $\deg f = n$

- **Ind. Anfang:** $\deg f = 0 \Rightarrow f$ konstant $\Rightarrow$ hat keine NSt.
- **Ind. Schritt:** Sei $n = \deg f$
  - Sind $b_1, \dots, b_m$ verschiedene NSt von f, schreibe $f = (x - b_1) \cdot g$
  - Für $i \geq 2$ ist b_i NSt von g, da: $\underbrace{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(b_i)}} = \underbrace{(b_i - b_1)}_{\neq 0} \cdot g(b_i)}_{\Rightarrow\, g(b_i) = 0}$

• Nach Satz 2.3.5 ist $\deg g = \deg f - \deg(x - b_1) = n - 1$
Nach Ind-Annahme hat g max. $n-1$ viele NSt.
Also $m - 1 \leq n - 1$. $\Rightarrow m \leq n$ □

<u>Satz 2.3.10 (Fundamentalsatz der Algebra)</u>: Ist $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg f \geq 1$, so besitzt f mind. eine Nullstelle.

$x^2 + 1$ als Polynom in $\mathbb{R}[x]$ hat keine NSt.

<u>Korollar 2.3.11</u>: Ist $f \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$, so ist $f = a \cdot (x - b_1) \cdot \ldots \cdot (x - b_n)$ für $a \in \mathbb{C}^\times$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$

($b_1, \ldots, b_n$ sind die NSt von f)

<u>Bew</u>: Bew per Ind über n:

<u>I.A.</u>: $\deg f = 0$. Dann ist $f = a_0 =: a$

<u>I.S</u>: $\deg f \geq 1 \Rightarrow f$ hat NSt b_1 (nach 2.3.10).
$\Rightarrow f = (x - b_1) \cdot g$ (nach 2.3.8)
• Habe $\deg g = \deg f - 1$
• Nach Ind. Ann: $g = a \cdot \underbrace{(x - b_2) \cdots (x - b_n)}_{\deg g \text{ viele Faktoren}}$
• $\Rightarrow f = a \cdot (x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdots (x - b_n)$ □