

1.4 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Def 1.4.1 Sei A eine Menge.

(a) Eine Relation auf A ist gegeben durch ein $R \subseteq A \times A$
Meistens werden Relationen mit einem Symbol bezeichnet
(z.B. \sim). Man schreibt dann " $a \sim b$ " für: $(a, b) \in R$
(a steht in dieser Relation zu b). (für $a, b \in A$)

(b) \sim heißt Äquivalenzrelation,
wenn gilt:

(i) $\forall a \in A: a \sim a$ (reflexiv)

(ii) $\forall a, b \in A: (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$
(symmetrisch)

(iii) $\forall a, b, c \in A: (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$
(transitiv)

In diesem Fall wird $a \sim b$ oft " a ist äquivalent zu b " ausgesprochen

(c) Ist \sim eine Äquiv-Rel auf A und ist $a \in A$, so nennt man $\{b \in A \mid b \sim a\}$ die Äquivalenzklasse von a .

Die Menge aller Äquivalenzklassen

ist $A/\sim := \{ \{b \in A \mid b \sim a\} \mid a \in A \}$

Aussprache: " A modulo \sim "

Bsp: $A = \mathbb{N}$

$a \sim b$ wenn a und b gleich viele Ziffern haben.

$(10, 29) \in R, (10, 5) \notin R$

(i) \checkmark (ii) \checkmark (iii) \checkmark
Also: \sim ist Äquiv-Rel

Äquiv-Klasse von 12
ist: $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$

$\mathbb{N}/\sim = \{ \{0, 1, \dots, 9\}, \{10, \dots, 99\}, \{100, \dots, 999\}, \dots \}$

Notation für:
 a ist durch m teilbar:
 $m \mid a$

Bsp 1.4.2: Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann wird durch

$a \sim b \Leftrightarrow a - b$ ist durch m teilbar.

eine \rightarrow Äquiv-Rel auf \mathbb{Z} definiert.

Übliche Notation dafür: $a \equiv b \pmod{m}$

Aussprache: a ist kongruent zu b modulo m

(i) $a - a$ durch m teilbar \checkmark

(ii) $m \mid a - b \Rightarrow m \mid b - a$ da $b - a = -(a - b)$

$$(iii) \quad m \mid a-b \wedge m \mid b-c \stackrel{?}{\Rightarrow} m \mid a-c$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \exists r: m \cdot r = a-b & & \exists s: m \cdot s = b-c \end{array}$$

$$\underbrace{m \cdot (r+s) = m \cdot r + m \cdot s = a-b + b-c}_{= a-c}$$

Bsp: $m = 5$

$$1 \sim 6 \qquad 1 \equiv 6 \pmod{5}$$

$$6 \sim 11 \dots$$

$$1 \not\sim 2$$

Äqu-Klasse von 1 = $\{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots \}$

$$\mathbb{Z}/\sim = \left\{ \begin{array}{l} \{ \dots, -4, 1, 6, \dots \}, \\ \{ \dots, -3, 2, 7, \dots \}, \\ \{ \dots, -2, 3, 8, \dots \}, \\ \{ \dots, -1, 4, 9, \dots \}, \\ \{ \dots, 0, 5, 10, \dots \} \end{array} \right\}$$

Jedes $a \in \mathbb{Z}$ kommt in genau einer dieser Mengen vor.

Def 1.4.3: Eine Partition einer Menge A ist eine Menge P von nicht-leeren Teilmengen von A , so dass gilt:

$$\forall a \in A: \exists^1 B \in P: a \in B$$

Satz 1.4.4: Ist \sim eine Äquiv-Rel auf einer Menge A , so ist A/\sim eine Partition von A .

Bew: Seien $A, \sim, a \in A$ gegeben. z.z: $\exists^1 B \in A/\sim: a \in B$.

(i) Existenz von B :

- Wähle $B :=$ Äquiv-Klasse von a
 $= \{ b \in A \mid b \sim a \}$

- Habe $a \in B$ wegen Reflexivität.

(ii) Eindeutigkeit von B :

- Sei $B' \in A/\sim$ die Äquiv-Klasse eines $a' \in A$.

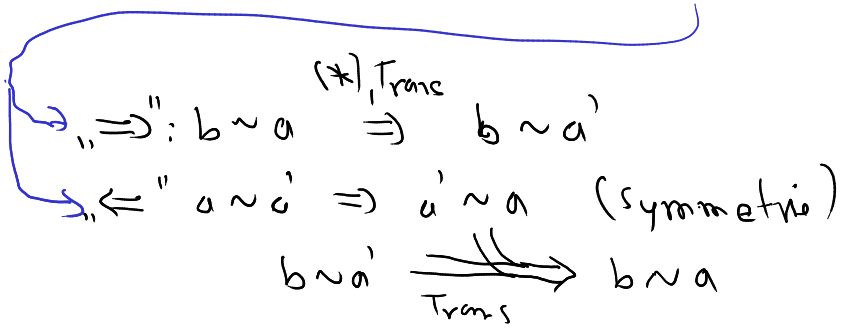
Wir nehmen an: $a \in B'$. z.z: $B' = B$

- $a \in B' = \{b \mid b \sim a'\} \Rightarrow a \sim a' \quad (*)$

- Um zu zeigen, dass $B' = B$ ist zeige: $\forall b \in A: (b \in B \Leftrightarrow b \in B')$

Sei also b gegeben.

$$b \in B \Leftrightarrow b \sim a \stackrel{?}{\Leftrightarrow} b \sim a' \Leftrightarrow b \in B'$$



□