1.4 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Def 1.4.1 Sei A eine Menge.

(a) Eine Relation auf A ist gegeben durch ein $R \subseteq A \times A$.
Meistens werden Relationen mit einem Symbol bezeichnet (z.B. $\sim$). Man schreibt dann „$a \sim b$" für: $(a,b) \in R$ (für $a,b \in A$)
(a steht in dieser Relation zu b).

(b) $\sim$ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt:

(i) $\forall a \in A: \ a \sim a$ („reflexiv")

(ii) $\forall a,b \in A: (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ („symmetrisch")

(iii) $\forall a,b,c \in A: (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$ („transitiv")

In diesem Fall wird $a \sim b$ oft „a ist äquivalent zu b" ausgesprochen.

(c) Ist $\sim$ eine Äquiv-Rel auf A und ist $a \in A$, so nennt man $\{b \in A \mid b \sim a\}$ die Äquivalenzklasse von a.

Die Menge aller Äquivalenzklassen ist $A/_\sim := \{\{b \in A \mid b \sim a\} \mid a \in A\}$
Aussprache: „A modulo $\sim$"

Bsp: $A = \mathbb{N}$

$a \sim b$ wenn a und b gleich viele Ziffern haben.

$((10,29) \in R, \ (10,5) \notin R)$

(i) ✓ (ii) ✓ (iii) ✓

Also: $\sim$ ist Äquiv-Rel

Äquiv-Klasse von 12 ist: $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$

$\mathbb{N}/_\sim = \{\{0,1,\dots,9\}, \{10,\dots,99\}, \{100,\dots,999\}, \dots\}$

Bsp 1.4.2: Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann wird durch
$$a \sim b \iff a-b \text{ ist durch } m \text{ teilbar.}$$
eine Äquiv-Rel auf $\mathbb{Z}$ definiert.

$m \mid a-b$

Übliche Notation dafür: $a \equiv b \mod m$

Aussprache: a ist kongruent zu b modulo m

Notation für: a ist durch m teilbar: $m \mid a$

(i) $a-a$ durch m teilbar ✓

(ii) $m \mid a-b \Rightarrow m \mid b-a$ da $b-a = -(a-b)$

$$\text{(iii)}\quad m \mid a-b \;\wedge\; m \mid b-c \overset{2.}{\Rightarrow} m \mid a-c$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\exists r: m \cdot r = a-b$$

$$\exists s: m \cdot s = b-c$$

$$m \cdot (r+s) = m \cdot r + m \cdot s = a-b + b-c$$

$$= a-c$$

Bsp: $m = 5$

$1 \sim 6 \qquad 1 \equiv 6 \pmod 5$

$6 \sim 11 \quad \ldots$

$1 \not\sim 2$

Äqu-Klasse von $1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$

$$\mathbb{Z}/\sim = \{ \{\ldots, -4, 1, 6, \ldots\}, \{\ldots -3, 2, 7, \ldots\}, \{\ldots -2, 3, 8, \ldots\}, \{\ldots -1, 4, 9, \ldots\}, \{\ldots, 0, 5, 10, \ldots\} \}$$

Jedes $a \in \mathbb{Z}$ kommt in genau einer dieser Mengen vor.

Def 1.4.3: Eine Partition einer Menge A ist eine Menge P von nicht-leeren Teilmengen von A, so dass gilt:

$$\forall a \in A: \exists^{=1} B \in P : a \in B$$

Satz 1.4.4: Ist $\sim$ eine Äquiv-Rel auf einer Menge A, so ist $A/\sim$ eine Partition von A.

Bew: Seien A, $\sim$, $a \in A$ gegeben. z.z.: $\exists^{=1} B \in A/\sim : a \in B$.

(i) Existenz von B:

- Wähle $B :=$ Äquiv-Klasse von a $= \{ b \in A \mid b \sim a \}$
- Habe $a \in B$ wegen Reflexivität.

(ii) Eindeutigkeit von B:

- Sei $B' \in A/\sim$ die Äquiv-Klasse eines $a' \in A$.

Wir nehmen an: $a \in B'$. z.z.: $B' = B$

- $a \in B' = \{ b \mid b \sim a' \} \Rightarrow a \sim a'$ $(*)$
- Um zu zeigen, dass $B' = B$ ist zeige: $\forall b \in A : (b \in B \Leftrightarrow b \in B')$

Sei also b gegeben.

$$b \in B \Leftrightarrow b \sim a \overset{?}{\Leftrightarrow} b \sim a' \Leftrightarrow b \in B'$$

„$\Rightarrow$": $b \sim a \overset{(*),\,\text{Trans}}{\Rightarrow} b \sim a'$

„$\Leftarrow$" $a \sim a' \Rightarrow a' \sim a$ (Symmetrie)

$$b \sim a' \xrightarrow[\text{Trans}]{} b \sim a$$

$\square$