1.3 Abbildungen

<u>Def. 1.3.1</u>: Seien A, B Mengen. Eine <u>Abbildung</u> (<u>Funktion</u>) f von A nach B ist gegeben durch eine Menge $G \subseteq A \times B$, mit der Eigenschaft: $\forall a \in A : \exists^{=1} b \in B : (a,b) \in G$.
Ist $a \in A$, so schreibe $f(a)$ für das eindeutige $b \in B$ mit $(a,b) \in G$. Man sagt auch, „f <u>bildet</u> a auf b <u>ab</u>".
„$\mathrm{Abb}(A,B)$" ist die Menge aller Abbildungen von A nach B.
Statt „$f \in \mathrm{Abb}(A,B)$" schreibt man auch: „$f: A \longrightarrow B$", und statt „$f(a) = b$" schreibt man auch: „$f: a \longmapsto b$"

<u>Bsp:</u> • Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$:
$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = \frac{n}{2}$
Zugehörige Menge G ist
$\{(0,0), (1,\frac{1}{2}), (2,1), \dots\}$
$= \{(n, \frac{n}{2}) \mid n \in \mathbb{N}\}$
$f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$
$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$0 \longmapsto 0$
$1 \longmapsto \frac{1}{2}$
$2 \longmapsto 1$

A nennt man den Definitionsbereich von f, B den Wertebereich und G den Graph von f.

<u>Bsp:</u> $f: \mathbb{N} \longrightarrow \{2,3,4\}$
$\forall n \in \mathbb{N}$: $f(n) = 2$ falls n eine Quadratzahl ist
$f(n) = 3$ falls n eine Primzahl ist
$f(n) = 4$ falls n weder Quadratzahl noch Primzahl ist.
In diesem Fall ist $G = \{(0,2), (1,2), (2,3), (3,3), (4,2), (5,3), (6,4), \dots\}$

<u>Konvention 1.3.2</u>: Ist $f: A_1 \times A_2 \longrightarrow B$, so schreibe statt $f((a_1, a_2))$ auch $f(a_1, a_2)$, etc ...

<u>Def 1.3.3</u>: Die <u>Identität</u> auf einer Menge A ist
$$\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto a$$

Def 1.3.4: Seien A, B, C Mengen und $\underbrace{f: A \to B,\ g: B \to C}$.

Die Verkettung (auch: Verknüpfung) von f und g ist

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$
$$a \longmapsto g(f(a))$$

Aussprache: „g nach f", „g kringel f"

Andere Not.: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a))$

Also:
- Wenn wir $h := g \circ f$ setzen: $h(a) = g(f(a))$
- Kann auch schreiben: $h(a) = (g \circ f)(a)$

Bsp: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$f(x) = x+1, \quad g(x) = x^2$ genauso richtig: $g(y) = y^2$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

Bsp: $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{7 \text{ mal}})(x) = (\ \ldots(x+1)+1 \ )+1 = x+7$

Def 1.3.5: Ist A eine Menge und $f: A \to A$ und $k \in \mathbb{N}$,

so setze $f^k := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ mal}}$ falls $k \geq 1$

und $f^0 := id_A$.

Def 1.3.6: Sei $f: A \to B$ (A, B Mengen)

(a) $A' \subseteq A$ so setze $f(A') := \{ f(a) \mid a \in A' \}$

„Bild von A' unter f"

(b) Das Bild von f ist $\operatorname{im} f := f(A)$

(c) Ist $B' \subseteq B$ so setze $f^{-1}(B') := \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$

„Urbild von B' unter f"

(d) Ist $b \in B$, so setze $f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$

Bsp: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \longmapsto x^2$

$f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{1, 0, 4\}$

$\operatorname{im} f$ = Menge der Quadratzahlen

$f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) = \{1,2,-1,-2\}$

$f^{-1}(4) = \{-2,2\}$ $\longleftarrow$ also f nicht injektiv

$f^{-1}(5) = \emptyset$ $\longleftarrow$ also f nicht surjektiv

<u>Def 1.3.7:</u> Ist $f: A \to B$ und $A' \subseteq A$, so setze

$$f|_{A'} : A' \to B, \quad a \mapsto f(a)$$

„<u>Einschränkung</u> von f auf A'"

<u>Bsp:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$

$g := f|_{\mathbb{Z}}$ Dann: $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$

$g^{-1}(2) = \emptyset$

$f^{-1}(2) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

<u>Def 1.3.8:</u> Sei $f: A \to B$

(a) f heißt <u>injektiv</u>, wenn gilt: $\forall b \in B: \#(f^{-1}(b)) \leq 1$

„f ist eine <u>Injektion</u> von A nach B". Notation: $f: A \hookrightarrow B$

(b) f heißt <u>surjektiv</u>, wenn gilt: $\forall b \in B: \#(f^{-1}(b)) \geq 1$

„f ist eine <u>Surjektion</u> von A nach B". Notation: $f: A \twoheadrightarrow B$

(c) f heißt <u>Bijektiv</u>, wenn gilt: $\forall b \in B: \#(f^{-1}(b)) = 1$

„f ist eine <u>Bijektion</u> von A nach B". Notation: $f: A \xrightarrow{1:1} B$

<u>Bem:</u> Jede Abb $f: A \to B$ kann aufgefasst werden als Abb.

$f: A \to f(A)$ und ist als solche surjektiv.

<u>Satz 1.3.9:</u> Sei $f: A \to B$

(a) Ist f bijektiv, so existiert genau eine Abb. $g: B \to A$,

so dass gilt: $\underbrace{g \circ f = \mathrm{id}_A}_{\text{d.h. } \forall a \in A:\ g(f(a)) = a}$ und $\underbrace{f \circ g = \mathrm{id}_B}_{\text{d.h. } \forall b \in B:\ f(g(b)) = b}$

Dieses g ist dann auch bijektiv.

(b) Existiert ein $g: B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$,

so ist f bijektiv.

<u>Def 1.3.10:</u> Ist $f: A \to B$ bijektiv, so nennt man das g aus

1.3.9 (a) die <u>Umkehrabbildung</u> (auch: das <u>Inverse</u>)

von f. Notation dafür: f^{-1}

- Falls $f: A \to A$ bijektiv ist, setze außerdem $f^{-k} := (f^{-1})^k$ für $k \in \mathbb{N}$

Bew (1.3.9): (a) Sei f bijektiv.

Existenz von g:

- Für $b \in B$ sei $g(b)$ das (eindeutige) $a \in A$ mit $f(a) = b$.
- Prüfe: (i) $\forall a \in A: g(f(a)) \overset{?}{=} a$

$b := f(a)$. $g(b)$ wurde so gewählt, dass $f(g(b)) = b$. Da $a \in A$ das einzige Element von A mit $f(a) = b$ muss $g(b) = a$ sein.

(ii) $\forall b \in B: f(g(b)) = b$

g wurde so gewählt, dass das gilt.

Eindeutigkeit von g:

Zu zeigen: Ist $g': B \to A$ eine Abb. mit $g' \circ f = id_A$ und $f \circ g' = id_B$, so ist bereits $g' = g$

Sei also so ein g' gegeben.

Prüfe: $\forall b \in B$: $g'(b) = g(b)$

Habe: $f(g'(b)) = b$, d.h. $g'(b) \in f^{-1}(b)$

$\underbrace{f^{-1}(b)}_{\{g(b)\}}$ nach Wahl von g

$\Rightarrow \quad g'(b) = g(b)$

(b) Nehme an, es existiert ein $g: B \to A$ mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$

Zu zeigen: (i) f injektiv

(ii) f surjektiv

„O.E."

(i) • Annahme: f ist nicht injektiv, d.h.
ex. $b \in B$ und $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ und
$f(a) = f(a') = b$.

• $g(b) \neq a \quad \vee \quad g(b) \neq a'$

• Ohne Einschränkung $g(b) \neq a$.

• $\Rightarrow \quad g(f(a)) \neq a \quad$ ↯ zu $g \circ f = id_A$

„Widerspruch"

Also f injektiv.

(ii) • Sei $b \in B$. Gesucht: $a \in A$ mit $f(a) = b$

• Setze $a := g(b)$.
Dann: $f(a) = f(g(b)) = b \quad \checkmark$

$\square$