1.2 Logik und Mengen

Nachträgliche Korrekturen sind mit einem gelben Balken markiert.

Konvention 1.2.1 (unpräzise): Sei A ein „Stück Text".

(a) Wenn die Frage „Ist A wahr?" Sinn ergibt, nennt man A eine (math.) Aussage. Math. Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Man sagt auch: „A gilt" bzw. „A gilt nicht". Und: Der „Wahrheitswert" von A ist wahr oder falsch.

(b) Bekommt A einen Wahrheitswert, nachdem man Werte für Variablen $x_1, \dots, x_n$ festgelegt hat, so nennen wir A eine Aussage über $x_1, \dots, x_n$.

(c) Wenn A ein math. Objekt beschreibt, nachdem man Werte für Variablen $x_1, \dots, x_n$ festgelegt hat, so nennen wir A einen Term in $x_1, \dots, x_n$. Aussprache: „A von $x_1, \dots x_n$"

(d) In (b) und (c) schreiben wir statt A oft $A(x_1, \dots, x_n)$ um die Abhängigkeit von $x_1, \dots, x_n$ zu betonen. Sind $c_1, \dots c_n$ math. Objekte, so schreibe $A(c_1, \dots, c_n)$ für das, was man erhält, wenn man c_i für x_i einsetzt, für $i = 1, \dots, n$.

Bsp: „16 ist eine Quadratzahl" : wahre Aussage.
„17 ist eine Quadratzahl" : falsche Aussage.
$2+2=5$: Falsche Aussage
$x+y=5$: Aussage über x, y — Bsp: wahr wenn $x=2, y=3$; falsch wenn $x=1$, $y=1$
$3+7$: keine Aussage, sondern Term
$3+x$: keine Aussage, sondern Term in x
das Quadrat von x : Term in x

Bsp: • $A(x,y) =$ „$x+y=5$"
Dann $A(2,3) =$ „$2+3=5$" (wahr)

Bsp: Jede Gleichung oder Ungleichung ist eine Aussage über die Variablen, die darin vorkommen.

Def 1.2.2: Seien A und B Aussagen. Dann sind auch das folgende Aussagen:

(a) „A und B sind beide wahr" (Konjunktion von A und B)

Notation: $A \wedge B$

(b) „A ist wahr oder B ist wahr oder beide" (Disjunktion von A und B)

Notation: $A \vee B$

(c) „A ist falsch" (Negation von A)

Notation: $\neg A$

(d) „Falls A wahr ist, ist auch B wahr"

Man sagt auch: „A impliziert B", „B folgt aus A"

Notation: $A \Rightarrow B$ (auch: $B \Leftarrow A$)

(e) „A und B haben den selben Wahrheitswert"

Man sagt auch: „A und B sind äquivalent"

Notation: $A \Leftrightarrow B$

Bsp: In 1.1.13 (a) hätte schreiben können:

$\underline{L}$ homogen $\Rightarrow$ $\underline{L}$ hat mind. eine nicht triv. Lsg

Satz 1.2.3 („Beweis durch Widerspruch"): Seien A und B Aussagen. Wenn „$(\neg A) \Rightarrow B$" gilt und B falsch ist, dann ist A wahr.

Bew: „Wahrheitstafel":

nach Annahme ist B falsch

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \Rightarrow B$
~~w~~	~~w~~	~~f~~	~~w~~
w	f	f	w
~~f~~	~~w~~	~~w~~	~~w~~
~~f~~	~~f~~	~~w~~	~~f~~

Bleibt: A ist wahr.

□

Def 1.2.4: (a) Eine **Menge** M ist ein mathematisches Objekt, das dadurch charakterisiert ist, welche mathematischen Objekte ihre **Elemente** sind. Für „x ist ein Element von M" sagt man auch „x liegt in M" oder „M enthält x".
Notation dafür: $x \in M$

(b) Weitere Notationen:
- „$x \notin M$" bedeutet: x ist nicht Element von M.
- „$x, y \in M$" bedeutet: $x \in M \wedge y \in M$
- Die Menge, die gar keine Elemente hat, wird mit $\emptyset$ bezeichnet und heißt **leere Menge**.

Def 1.2.5: Wir schreiben $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen (inklusive 0), $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen.

bei mir

Gemeint ist: „$x \in \mathbb{N}$" ist gleichbedeutend mit: „x ist eine natürliche Zahl"

Def 1.2.6: Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots$ beliebig.
(a) $\{x_1\}$ ist die Menge, deren einziges Element x_1 ist.
(b) $\{x_1, x_2\}$ ist die Menge, deren einzige Elemente x_1 und x_2 sind.
(c) Analog $\{x_1, x_2, x_3\}$, etc.

Elemente dürfen in dieser Notation mehrfach erwähnt werden. Das ändert die Menge nicht.

Bsp: • $M_1 := \{\underbrace{1, 5}_{\text{nicht } 1\frac{1}{2} \text{ gemeint}}\}$. Dann: $1 \in M_1$, $5 \in M_1$
$2 \notin M_1$, $3 \notin M_1$, $\frac{1}{9} \notin M_1$
$\frac{1}{5} \notin M_1$, $(1, 5) \notin M_1$
$2+3 \in M_1$ (da $2+3=5$ und $5 \in M_1$)

$x \in M_1 \iff (x = 1 \lor x = 5)$

- $M_2 := \{1, 5, 1\}$:

  $x \in M_2 \iff \underbrace{(x = 1 \lor x = 5 \lor x = 1)}$

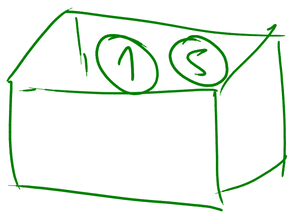
  $\iff (x = 1 \lor x = 5)$

Also $M_2 = M_1$

- Ist $\{1, 5\} \in M_1$?

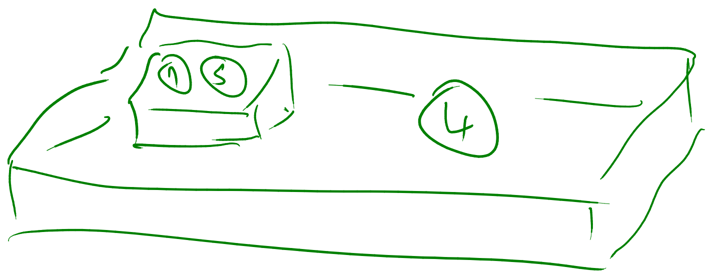
  Prüfe: Gilt $\underbrace{\underbrace{\{1,5\} = 1}_{\text{gilt nicht}} \lor \underbrace{\{1,5\} = 5}_{\text{gilt nicht}}}_{\text{gilt nicht.}}$?

  Also: Nein.

Anschauung: $M_1 =$ 

- $M_3 = \{\{1, 5\}, 4\}$ d.h. $x \in M_3 \iff (x = \{1,5\} \lor x = 4)$

  $= \{M_1, 4\}$

  $M_3 =$ 

  $\{1,5\} \in M_3$ $\quad$ $4 \in M_3$

  $1 \in M_3$? Nein

  („1 liegt nur indirekt in M_3")

- $M_4 = \{5\}$

  $5 \in M_4$

  Konvention

  Ist $M_4 = 5$? Nein. (5 ist eine Zahl und M_4 ist eine Menge.)

- $M_5 = \{\{1\}, \{5\}\} =$ 

  $1 \notin M_5$

  $\{1\} \in M_5$

  $1 \in \{1\}$

schreibe manchmal auch nur $\{x \mid A(x)\}$

Def 1.2.7 (a) Ist M eine Menge und $A(x)$ eine Aussage über x, so schreiben wir $\{x \in M \mid A(x)\}$ für die Menge der $\underbrace{x \text{ aus } M}_{x \in M}$, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist.

(b) Ist $A(x)$ eine Aussage über x und $T(x)$ ein Term in x, so schreibt man $\{T(x) \mid A(x)\}$ für die Menge aller Werte, die $T(x)$ annimmt, wenn $A(x)$ gilt. Analog mit mehreren Variablen.

$\{x \mid x \in M \wedge A(x)\}$

Bsp:

- $\{1, 5\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 \vee x = 5\}$
- $M_6 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Quadratzahl}\}$

  $0 \in M_6,\ 1 \in M_6,\ 2 \notin M_6,\ 3 \notin M_6,\ \underset{2^2}{\overset{\shortparallel}{4}} \in M_6,\ \underset{3^2}{\overset{\shortparallel}{9}} \in M_6, \ldots$

  $M_6 = \{0, 1, 4, 9, 16, \underbrace{\ldots}_{\text{unpräzise Notation}}\}$

- $M_7 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

  $x = 0 \rightsquigarrow x^2 = 0 \rightsquigarrow 0 \in M_7$

  $x = 1 \rightsquigarrow x^2 = 1 \rightsquigarrow 1 \in M_7$

  $x = 2 \rightsquigarrow x^2 = 4 \rightsquigarrow 4 \in M_7$

  $\ldots$

  $2 \notin M_7,\ 3 \notin M_7, \ldots$

  $M_7 = M_6$

- $M_8 = \{x \mid x \text{ Primzahl}\}$

  $2 \in M_8,\ 3 \in M_8,\ 5 \in M_8,\ 4 \notin M_8 \ldots$

Def 1.28: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$.

$$\{m, \dots, n\} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{m \leq k \leq n}_{m \leq k \ \wedge \ k \leq n}\}$$

Ist $m > n$, so setze $\{m, \dots, n\} := \emptyset$.

Def 1.2.9: Sei $A(x)$ eine Aussage über x und M eine Menge.

(a) „$\forall x \in M: A(x)$" bedeutet: „$A(x)$ gilt für jedes x aus M. („Für alle x aus M gilt $A(x)$")

Allquantor

Existenzquantor

mindestens

(b) „$\exists x \in M: A(x)$" bedeutet: Es existiert ein Element x von M, für das $A(x)$ gilt.

(c) „$\exists^{=1} x \in M: A(x)$" bedeutet: Es existiert genau ein Element x von M, für das $A(x)$ gilt.

(Analog: $\exists^{=2}$, $\exists^{\geq 2}$, ...)

Manchmal lässt man das „$\in M$" in der Notation weg.

Konvention: Ist M leer, so ist „$\forall x \in M: A(x)$" wahr.

„$\forall x, y \in M$" bedeutet: „$\forall x \in M: \forall y \in M$:"

Bsp: $A(x) := x^2 \geq x$" ist eine Aussage über x.

$\forall x \in \mathbb{N}: x^2 \geq x$ ist eine Aussage. (wahr)

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq x$ ist eine Aussage. (falsch, da $\frac{1}{2}^2 < \frac{1}{2}$)

$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \geq x$ ist wahre Aussage (da $5^2 \geq 5$)

- Wenn $M = \{5, 6, 7\}$ ist

  $\forall x \in M: A(x)$ äquivalent zu $A(5) \wedge A(6) \wedge A(7)$

  (Für jedes Element von M ist die Bedingung zu überprüfen. Ist M leer, so braucht man gar nichts zu überprüfen.)

- „$\neg \forall x \in M: A(x)$" $\Leftrightarrow$ Es ist nicht wahr, dass A für alle Elemente von M gilt.

  $\Leftrightarrow$ Es gibt mind. ein $x \in M$, so dass $A(x)$ nicht gilt

$\iff \exists x \in M: \neg A(x)$

- „$\neg \exists x \in M: A(x)$" $\iff$ Nicht wahr: ex. $x \in M$, so dass $A(x)$ gilt.
  $\iff$ Für kein $x \in M$ gilt $A(x)$
  $\iff$ Für alle $x \in M$ gilt $\neg A(x)$
  $\iff$ $\forall x \in M: \neg A(x)$

- $M_8 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ Primzahl}\}$
  $= \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 1 \wedge \forall m, n \in \mathbb{N}: (m \cdot n = x \Rightarrow (m = 1 \vee n = 1))\}$

Def 1.2.10 (a) Sind M_1 und M_2 Mengen, so ist $M_1 \times M_2$ die Menge der Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$. Man nennt dies das kartesische Produkt von M_1 und M_2.

Analog: $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{\underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\text{Term in } x_1, x_2, x_3} \mid \underbrace{x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3}_{\text{Aussage über } x_1, x_2, x_3}\}$
etc

Gemeint ist $x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in M_2 \wedge x_3 \in M_3$

(b) Ist M eine Menge und $n \in \mathbb{N}$, so setze

$$M^n := \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ Mal}}$$

Also: Menge der n-Tupel aus Elementen von M

Konvention: M^0 ist die Menge, die nur das leere Tupel enthält.

Bem: • $(M_1 \times M_2) \times M_3 = \{((x_1, x_2), x_3) \mid x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3\}$
Hier ist man oft unpräzise. Unterscheide oft nicht zwischen
$(M_1 \times M_2) \times M_3$ und $M_1 \times M_2 \times M_3$ etc

- Insbesondere: Unterscheide oft nicht zwischen
  $((1, 5), 9)$ und $(1, 5, 9)$
  (Aber unterscheide immer zw. $\{\{1, 5\}, 9\}$ und $\{1, 5, 9\}$)

- Bsp: Lin. GL. $2x + 3y - z = 7$
  $\rightsquigarrow$ Menge der Lösungen davon: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 7\}$

oder $|M|$

Def 1.2.11: Ist M eine Menge, so schreibe $\#M$ für die Anzahl der Elemente von M. Dies nennt man auch die Kardinalität von M. Hat M unendlich viele Elemente, so setze

auch „Mächtigkeit"

$$\#M := \infty$$ ← Symbol für „unendlich"

(Auch bei unendlichen Mengen kann man noch „verschieden große" Mengen unterscheiden. Die kleinsten unendl. großen Mengen nennt man abzählbar; größere überabzählbar.)

Bsp:
- $M_1 = \{3, 5, 4\}$ $\quad \#M_1 = 3$
- $M_2 = \{1, 5, 1\} = \{1, 5\}$ $\quad \#M_2 = 2$
- $\#\emptyset = 0$
- $\#\mathbb{N} = \infty$

n lauter verschiedene $x_1, \dots, x_n$

Formal:
- Eine Menge M hat Kardinalität n, wenn paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_n$ existieren mit $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Ist dies für kein $n \in \mathbb{N}$ der Fall, so hat M Kardinalität ∞.

Konvention 1.2.12: Sei $A(x)$ eine Aussage über x und M eine Menge. Mit „Für fast alle $x \in M$ gilt $A(x)$" ist gemeint: ex. höchstens endl. viele $x \in M$, so dass $A(x)$ nicht gilt.

Bem: Falls M endlich, ist das immer wahr.

Bsp: Fast alle natürlichen Zahlen sind größer als 25.
(Aber nicht: Fast alle ganzen Zahlen sind größer als 25.)

Definition 1.2.13:
- Seien A, B Mengen. A heißt Teilmenge von B (Notation: $A \subseteq B$), wenn gilt: $\forall a \in A: a \in B$
  („$A \not\subseteq B$" heißt: A ist nicht Teilmenge von B)
  Man nennt auch A Untermenge von B und B Obermenge von A.
- $A \subsetneq B$ bedeutet: $A \subseteq B$ aber $A \neq B$

Bsp: $\{1,5\} \subseteq \mathbb{N}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,3,4,5\}$

$\{1,5,7\} \not\subseteq \{1,5\}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,5\}$ (Nicht: $\{1,5\} \subsetneq \{1,5\}$)

- $M_1 = \{\{1,5\}, 3, 4\}$

  $\{1,5\} \not\subseteq M_1$ (aber $\{1,5\} \in M_1$)

  da $1 \in \{1,5\}$ aber $1 \notin M_1$

  $\{\{1,5\}\} \subseteq M_1$

- $M_2 = \{\{1,5\}, 1, 5\}$

  $\{1,5\} \subseteq M_2$ (und $\{1,5\} \in M_2$)

Def. 1.2.14: Seien A, B Mengen.

(a) Der Schnitt von A und B ist

$$\underbrace{A \cap B}_{\text{„A geschnitten B"}} := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(b) Die Vereinigung von A und B ist

$$\underbrace{A \cup B}_{\text{„A vereinigt B"}} := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(c) Die Differenz von A und B ist

$$\underbrace{A \setminus B}_{\text{„A ohne B"}} := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

„B / A" bedeutet was anderes. (später)

Bsp: $M_1 = \{1,2,4\}$

$M_2 = \{3,4,5\}$

$M_1 \cap M_2 = \{4\}$

$M_1 \cup M_2 = \{1,2,4,3,5\}$

$M_1 \setminus M_2 = \{1,2\}$

Def 1.2.15: Sei A eine Menge. Die Potenzmenge von A ist

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Bsp: • $M = \{1, 3\}$

Alle Teilmengen von M: $\{1,3\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\emptyset$

$\mathcal{P}(M) = \{ \{1,3\}, \{1\}, \{3\}, \emptyset \}$

Bem: Ist $\#M = n$, so ist $\#\mathcal{P}(M) = 2^n$

Def. 1.2.16: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq m$ und sei $T(i)$ ein Term in i.

(a) Wir setzen

$$\sum_{i=m}^{n} T(i) := T(m) + T(m+1) + \ldots + T(n)$$

Bsp: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$

(b) Ist I eine Menge so ist

$$\sum_{i \in I} T(i)$$

die Summe der Werte von $T(i)$, wenn i alle Elemente von I durchläuft.

Bsp: $\sum_{i=5}^{7} (i+1)^2 = (5+1)^2 + (6+1)^2 + (7+1)^2 = 36 + 49 + 64 = 149$

$\sum_{x \in \{-2,1,2\}} x^2 = (-2)^2 + 1^2 + 2^2 = 9$

Ist $A(i)$ eine Aussage, so setze

$$\sum_{A(i)} T(i) := \sum_{i \in I} T(i) \quad \text{für } I = \{ i \mid A(i) \}$$

$\sum_{1 \leq n \leq 5} n = 1+2+3+4+5 = 15$

gemeint ist, dass $n \in \mathbb{N}$ soll.

(c) $\sum_{i \in \emptyset} T(i) := 0$

(d) Für unendliche Mengen I ist die Summe nicht immer definiert.
Ist $T(i) = 0$ für fast alle $i \in I$, so ist $\sum_{i \in I} T(i)$ die Summe derjenigen $T(i)$, die ungleich 0 sind.

Def 1.2.17: Analog:

(a) $\prod_{i=m}^{n} T(i) := T(m) \cdot T(m+1) \cdot \ldots \cdot T(n)$

$\bigcup_{i=m}^{n} T(i) := T(m) \cup \ldots \cup T(n)$ falls die $T(i)$ Mengen sind

$\bigcap_{i=m}^{n} T(i) := T(m) \cap \ldots \cap T(n)$

(b) Auch analog: $\prod_{i \in I} T(i)$, $\prod_{A(i)} T(i)$ etc.

(c) $\prod_{i \in \emptyset} T(i) := 1$

$\bigcup_{i \in \emptyset} T(i) := \emptyset$

$\bigcap_{i \in \emptyset} T(i) = ??$ (keine allgemeine Konvention)

$M = \{\{1,5\},\{2\},\{5,7\}\}$

$\bigcup_{A \in M} A = \{1,5\} \cup \{2\} \cup \{5,7\} = \{1,2,5,7\}$

$\bigcap_{A \in M} A = \{1,5\} \cap \{2\} \cap \{5,7\} = \emptyset$

(d) Ist I beliebig (also evtl. unendlich), so defieniere:

$$x \in \bigcup_{i \in I} T(i) \iff \exists i \in I: x \in T(i)$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} T(i) \iff \forall i \in I: x \in T(i)$$