Lineare Algebra 1

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Beispiel: Lineare Gleichungssysteme

„Zahlen" := reelle Zahlen

Das, was links steht wird definiert

Bsp für Lin. Gleichungssysteme =: LGS

- $3 \cdot x = 9$ Lösung: $x = 3$
- $2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$ Lösungen: • $x = 3, y = 2$ • $x = 0, y = 0$
- $x_1 + x_2 - x_3 = 4$
  $x_1 + x_2 + 3x_3 = 20$

Nicht-Bsp: • $x \cdot x = 9$ nicht linear

wir nehmen jetzt an, dass ...

Def 1.1.1: (a) Sei n eine natürliche Zahl, seien $a_1, \dots, a_n$ und b beliebige Zahlen und seien $x_1, \dots, x_n$ Variablen. Dann ist ein Ausdruck der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ eine lineare Gleichung in $x_1, \dots, x_n$.

(b) Eine Lösung davon ist ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von Zahlen, das die Gleichung erfüllt.

Def 0.1: (a) Die natürlichen Zahlen sind $0, 1, 2, 3, \dots$

ist bei Herrn Braun keine nat. Zahl

(b) Die ganzen Zahlen sind $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Konv. 0.2: Variable := Symbol, das für ein $\underbrace{\text{math. Objekt}}_{\text{Wert der Variable}}$ stehen kann

Symbole: $a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$
$a', a'', \hat{a}, \tilde{a}, \ldots$
$a_1, a_2, a_3, \ldots$
$a_{-1}, \ldots \quad a_{3,7}, \ldots$

<u>Konstante</u> := Variable mit festgelegtem Wert

<u>Bsp:</u> Konstanten: • $\pi = 3,14159\ldots$
• Bei einer lin. Gl.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

sind $a_1, \ldots, a_n, b$ Konstanten aber $x_1, \ldots, x_n$ nicht.

<u>Bsp. Lin Gl:</u> • $n = 4 \qquad a_1 = 5 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1 \quad a_4 = 1$
$b = 9$

$$\rightsquigarrow \quad 5 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 9$$

Kürzer aufgeschrieben:

$$5 \cdot x_1 \qquad - x_3 \qquad + x_4 = 9$$

Lösung davon (Bsp): $(1, 3, 1, 5)$
d.h. $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 5$

<u>Konv 0.3:</u> Ist $n = 0$, so ist mit „$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$" 0 gemeint.

<u>Bsp:</u> $n = 0$: $\quad 0 = 7$ ist eine Lin. Gleichung.
(Hat keine Lösung.)

Könnte auch schreiben:
$0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
d.h. fange mit 0 an und addiere $a_1; a_2; \ldots; a_n$

<u>Def. 0.4:</u> Sind a_1, a_2 beliebig, so schreibt man (a_1, a_2) für das <u>Paar</u> bestehend aus a_1 und a_2. Zwei Paare (a_1, a_2) und (a_1', a_2') sind gleich, wenn $a_1 = a_1'$ und $a_2 = a_2'$.
Analog: <u>Tripel</u> $(a_1, a_2, a_3), \ldots$; allgemeiner <u>n-Tupel</u> $(a_1, \ldots, a_n)$ für natürliche Zahlen n.

<u>Bsp:</u> $(1, 2) \neq (2, 1)$

(Es gibt keine Konvention für eine Notation für das 0-Tupel.)

Def 1.1.2: Seien m, n nat. Zahlen. Ein <u>LSG</u> in einem Var-Tupel $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n)$ ist ein Tupel $\underline{L} := (L_1, \dots, L_m)$ von linearen Gleichungen in $\underline{x}$. Eine Lösung von $\underline{L}$ ist ein n-Tupel $\underline{x}$, das Lösung jeder der Gleichungen $L_1, \dots, L_n$ ist.

Bsp: $n = 3$, $m = 2$. $L_1 =$ „$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9$"

$L_2 =$ „$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 11$"

LGS: $\underbrace{(3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9,\ x_1 = 11)}$

übliche Notn:

$$\left(\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 11 \end{array} \right)$$

$$\Big\updownarrow$$

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right) \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

<u>verschiedene Notationen für Tupel:</u>

- $(1,3,0,7)$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

Def. 1.1.3: Sei

$$\underline{L} := \left(\begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + \dots\dots \qquad = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots\dots \qquad = b_m \end{array} \right)$$

ein LGS.

(a) Die <u>Koeff-Matrix</u> von $\underline{L}$ ist das Tupel $\leftarrow$ $(n \cdot m + m)$-Tupel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

$\leftarrow$ manchmal auch „erweiterte Koeff.-Matrix" genannt.

(b) Ist $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, so nennt man $\underline{L}$ <u>homogen</u>. Ist dies der Fall, so betrachtet man als Koef-Matrix oft nur $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ ← „nicht-erweitert"

(c) Ist $\underline{L}$ beliebig, so erhält man das zugehörige homogene LSG, indem man $b_1, \ldots, b_m$ durch 0 ersetzt.

Bsp: $\underline{L} = \begin{pmatrix} 3x & & +z = 4 \\ 2x & -y & -z = 9 \end{pmatrix}$ (in den Var x, y, z)

Koeff-Matrix: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right)$

zug. homogenes LGS: $\begin{pmatrix} 3x & & +z = 0 \\ 2x & -y & -z = 0 \end{pmatrix}$

Behauptungen, die wir beweisen wollen, nennt man Satz, Lemma, Proposition, Theorem, Korollar...

Lemma: „Hilfssatz"

Korollar: Satz, der direkt aus einem anderen folgt

Lemma 1.1.4: Sei $\underline{L}$ ein homogenes LGS in n Variablen. Dann gilt:

(a) Das n-Tupel $(0, 0, \ldots, 0)$ ist eine Lösung von $\underline{L}$ (die triviale Lösung).

(b) Sind $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\underline{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$ Lösungen von $\underline{L}$, so ist auch $\underline{x} + \underline{x}' := (x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n')$ eine Lösung von $\underline{L}$.

(c) Ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$ und ist λ eine beliebige Zahl, so ist auch $\lambda \cdot \underline{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ eine Lösung von $\underline{L}$.

Bsp: $\underline{L} = \begin{pmatrix} 3x & & +z = 0 \\ 2x & -y & -z = 0 \end{pmatrix}$ (3 Variablen)

(a) $(0,0,0)$ ist Lsg von $\underline{L}$ ✓

(b) $\underline{x} = (1, 5, -3)$, $\underline{x}' = (2, 10, -6)$ sind Lsg.
$\underline{x} + \underline{x}' = (1+2, 5+10, -3+(-6)) = (3, 15, -9)$ ✓

(c) $\underline{x} = (1,5,-3)$ ist Lsg
$2 \cdot \underline{x} = (2, 10, -6)$ ist auch Lsg. ✓

Bew: Sei $\underline{L}$ ein homogenes LGS mit Koeff-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Gleichungen davon: $L_1 =$ „$a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0$"
$L_2 =$ „$a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n = 0$"

(a) Behauptung: $(0,0,\dots,0)$ ist Lsg von $\underline{L}$.
Dazu ist zu zeigen: $(0,0,\dots,0)$ ist Lsg jeder Gleichung von $\underline{L}$. Also: Betrachte die j-te Gleichung $(1 \leq j \leq m)$:

$$a_{j,1} \cdot x_1 + \dots + a_{j,n} \cdot x_n = 0$$

Setze $(0,0,\dots,0)$ ein:

Wir wollen prüfen, ob das wahr ist

$$a_{j,1} \cdot 0 + \dots + a_{j,n} \cdot 0 \overset{?}{=} 0$$

Die linke Seite ist:

$$\underbrace{a_{j,1} \cdot 0}_{=0} + \dots + \underbrace{a_{j,n} \cdot 0}_{=0} = 0 + \dots + 0 = 0$$

Also habe „=" bei $\overset{?}{}$
Habe also gezeigt: $(0,0,\dots,0)$ ist Lsg der j-ten Gleichung. Da dies für alle j zwischen 1 und m geht, ist $(0,\dots,0)$ Lsg von allen Gleichungen von $\underline{L}$. Das bedeutet: $(0,\dots,0)$ ist Lösung von $\underline{L}$.

(b) Seien $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ und $\underline{x}' = (x_1',\dots,x_n')$ Lösungen von $\underline{L}$. Wir wollen zeigen: $\underline{x} + \underline{x}'$ ist Lsg von $\underline{L}$.
Also zu zeigen: $\underline{x} + \underline{x}'$ ist Lösung der j-ten Gleichung für $1 \leq j \leq m$.
Wir wissen: $\underline{x}$ ist Lsg von $\underline{L}$; d.h. insbes: $\underline{x}$ ist Lösung der j-ten Gleichung, d.h. es gilt: $a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = 0$. (*)

Analog: $\underline{x}'$ ist Lsg von $\underline{L}$, d.h. $a_{j,1} x_1' + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n' = 0$ (**)

Wir wollen zeigen:

$$\underbrace{a_{j,1}(x_1 + x_1')}_{\|} + \ldots + \underbrace{a_{j,n}(x_n + x_n')}_{} \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{a_{j,1} \cdot x_1} + \underbrace{a_{j,1} \cdot x_1'} + \ldots + \underbrace{a_{j,n} \cdot x_n} + \underbrace{a_{j,n} \cdot x_n'}$$

(umsortieren)

$$= \underbrace{a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n}_{\overset{(*)}{=} 0} + \underbrace{a_{j,1} \cdot x_1' + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n'}_{\overset{(**)}{=} 0}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

(c) Sei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Lsg von $\underline{L}$ und sei λ eine Zahl.

„zu zeigen" $\underline{z.z}$: $\lambda \cdot \underline{x}$ ist Lsg von $\underline{L}$, d.h. für $1 \leq j \leq m$ gilt: $\lambda \cdot \underline{x}$ ist Lsg der j-ten Gleichung, d.h.

Gemeint ist: „Wenn j eine beliebige nat. Zahl zw. 1 und m ist, gilt das folgende"

$$\underbrace{a_{j,1} \cdot (\lambda \cdot x_1)}_{\|} + \ldots + \underbrace{a_{j,n} \cdot (\lambda \cdot x_n)}_{\|} \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{\lambda \cdot (a_{j,1} \cdot x_1) + \ldots + \lambda \cdot (a_{j,n} \cdot x_n)}_{\|}$$

$$\lambda \cdot \underbrace{(a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n)}_{\| \atop 0}$$

$\leftarrow$ da $\underline{x}$ Lsg der j-ten Gleichung von $\underline{L}$ ist

$$= \lambda \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$\square$

„Beweis zu Ende"

<u>Satz 1.1.5</u>: Sei $\underline{L}$ ein beliebiges LGS, das mindestens eine Lösung $\underline{x}$ besitzt, und sei $\underline{L}_0$ das zugehörige homogene LGS. Dann lassen sich wie folgt sämtliche Lösungen von $\underline{L}$ aus den Lösungen von $\underline{L}_0$ bestimmen: Ist $\underline{y}$ eine Lösung von $\underline{L}_0$,

so ist $\underline{x}+\underline{y}$ eine Lösung von $\underline{L}$.

Bsp: $\underline{L} = \begin{pmatrix} 3x & & +z & = 4 \\ 2x & -y & -z & = 9 \end{pmatrix}$

Lösung davon: $\underline{x} = (1, -8, 1)$ (Bsp)

$\underline{L}_0 = \begin{pmatrix} 3x + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{pmatrix}$

- Lösung von $\underline{L}_0$: $\underline{y} = (1, 5, -3)$ (Bsp)

  Laut Satz ist $\underline{x}+\underline{y}$ Lsg von $\underline{L}$

  $$\underline{x}+\underline{y} = (2, -3, -2)$$

- Weitere Lsg von $\underline{L}$: $(3, 2, -5) = \underbrace{(1, -8, 1)}_{\underline{x}} + \underbrace{(2, 10, -6)}_{\text{ist Lsg von } \underline{L}_0}$

Bew: Sei $\underline{L}$ ein LGS und $\underline{x}$ eine Lösung davon.

Sei $\underline{L}_0$ das zug. homogene LGS.

zu zeigen: (i) Ist $\underline{y}$ eine Lsg von $\underline{L}_0$, so ist $\underline{x}+\underline{y}$ eine Lsg von $\underline{L}$

(ii) Jede Lsg von $\underline{L}$ lässt sich auf diese Art erhalten, d.h. ist $\underline{x}'$ eine Lsg von $\underline{L}$, so existiert eine Lsg $\underline{y}$ von $\underline{L}_0$, so dass $\underline{x}' = \underline{x}+\underline{y}$ gilt.

sei $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$ die Koeff-Matrix von $\underline{L} = (L_1, \dots, L_m)$.

(i) Sei $\underline{y}$ Lsg von $\underline{L}_0$, d.h. $\overbrace{a_{j,1} y_1 + \dots + a_{j,n} y_n = 0}^{j\text{-te Gl. von } \underline{L}_0}$ (*)

für alle j $(1 \leq j \leq m)$

z.z: $a_{j,1} \cdot (x_1 + y_1) + \dots + a_{j,n} \cdot (x_n + y_n) \overset{?}{=} b_j$ (für alle j)

Da $\underline{x}$ Lsg von $\underline{L}$: $a_{j,1} x_1 + \dots + a_{j,n} x_n = b_j$ (**)

$(*)+(**)$: $a_{j,1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n + a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 0 + b_j$

$$\overset{\shortparallel}{a_{j,1}\cdot(x_1+y_1) + \ldots + a_{j,n}\cdot(x_n+y_n)} \quad \checkmark$$

(ii) sei $\underline{x}'$ Lsg von $\underline{L}$, d.h. $a_{j1}x_1' + \ldots + a_{jn}x_n' = b$ für alle j

Zu zeigen: Ex. Lsg $\underline{y}$ von $\underline{L}_0$ s.d. $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{y}$ $(*)$

Setze $\underline{y} = \underline{x}' - \underline{x} = (x_1' - x_1, \ldots, x_n' - x_n)$

Dann gilt $(*)$. Noch zu prüfen: $\underline{y}$ ist Lsg von $\underline{L}_0$, d.h.:

$$a_{1,j}(x_1'-x_1) + \ldots + a_{n,j}(x_n'-x_n) \overset{?}{=} 0$$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{a_{1j}x_1' + \ldots + a_{nj}x_n'}_{\overset{\shortparallel}{b_j} \text{ da } \underline{x}' \text{ Lsg von } \underline{L}} - \underbrace{(a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n)}_{\overset{\shortparallel}{b_j} \text{ da } \underline{x} \text{ Lsg von } \underline{L}}$$

$$= b_j - b_j = 0$$ □

<u>Lemma 1.1.6</u>: Sei $L := $ „$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$",
sei $L' := $ „$a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n = b'$",
und sei λ eine beliebige Zahl.
Sei außerdem $\underline{x}$ sowohl Lsg von L als auch von L'.
Dann ist $\underline{x}$ auch Lsg von
(i) $L + L' :=$ „$(a_1+a_1')x_1 + \ldots + (a_n+a_n')x_n = b+b'$"
und
(ii) $\lambda\cdot L :=$ „$(\lambda a_1)\cdot x_1 + \ldots + (\lambda a_n)x_n = \lambda\cdot b$".

<u>Bew:</u> durch nachrechnen □

<u>Def 1.1.7</u>: Sei $\underline{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ ein LGS. Eine <u>elementare Transformation</u> von $\underline{L}$ ist ein LGS $\underline{L}'$, das man auf eine der folgenden Arten aus $\underline{L}$ erhält:

(a) zwei Gleichungen tauschen

(b) eine Gleichung L_j durch $\lambda \cdot L_j$ ersetzen, für eine Zahl $\lambda \neq 0$

(c) eine Gleichung L_j durch $L_j + \lambda \cdot L_k$ ersetzen, für eine beliebige Zahl λ und ein beliebiges $k \neq j$.

<u>Bsp:</u> $\underline{L}$ habe Koeff-Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\cdot(-2)$

$\cdot 7$

Praktische Notation

Bsp zu (a):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Bsp zu (b):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 0 & 14 & 0 \end{array}\right) \qquad \lambda = 7,\ j = 3$$

Bsp zu (c):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \lambda = -2,\ j = 1,\ k = 3$$

<u>Lemma 1.1.8:</u> Ist $\underline{L}$ ein LGS und $\underline{L}'$ eine elementare Transformation von $\underline{L}$, so ist auch $\underline{L}$ eine elementare Transformation von $\underline{L}'$.

<u>Bew:</u>
- Falls $\underline{L}'$ aus $\underline{L}$ durch (a) hervorgegangen ist:
  Erhalte $\underline{L}$ aus $\underline{L}'$ indem man die selben Gleichungen nochmal tauscht
- Falls $\underline{L}'$ aus $\underline{L}$ durch (b) hervorgegangen ist:
  Erhalte $\underline{L}$ aus $\underline{L}'$ durch Multiplizieren der j-ten Gl. mit $\frac{1}{\lambda}$.
- Falls $\underline{L}'$ aus $\underline{L}$ durch (c) hervorgegangen ist, also
  $L_j' = L_j + \lambda \cdot L_k$ ⟵ Brauche $L_k = L_k'$; dafür verwende $k \neq j$

Dann ist $L_j = L_j' + (-\lambda) \cdot L_k'$ (also geht $\underline{L}$ aus $\underline{L}'$ mit (c) hervor)

□

Satz 1.1.9: Ist $\underline{L}$ ein LGS und $\underline{L}'$ eine elem. Transf. von $\underline{L}$, so haben $\underline{L}$ und $\underline{L}'$ die gleichen Lösungen

Bew: Zu zeigen ist, für alle Tupel $\underline{x}$:

(i) Ist $\underline{x}$ Lsg von $\underline{L}$, so ist $\underline{x}$ auch Lsg von $\underline{L}'$.

(ii) Ist $\underline{x}$ Lsg von $\underline{L}'$, so ist $\underline{x}$ auch Lsg von $\underline{L}$.

Bew (i): Mache Fallunterscheidung danach, wie $\underline{L}'$ aus $\underline{L}$ gewonnen wurde (Fälle aus Def. 1.1.7):

(a) klar.

(b) folgt aus Lemma 1.1.6 (ii)

(c) Nach 1.1.6 (ii) ist $\underline{x}$ Lsg von $\lambda \cdot L_k$.
Nach 1.1.6 (i) ist $\underline{x}$ auch Lsg von $L_j + \lambda \cdot L_k$

Bew (ii): Sei $\underline{x}$ Lsg von $\underline{L}'$.
Nach 1.1.8 ist $\underline{L}$ el. tr. von $\underline{L}'$.
Nach dem bereits bewiesenen (i) ist $\underline{x}$ damit auch Lsg von $\underline{L}$.

angewandt auf vertauschte $\underline{L}$ und $\underline{L}'$

□

Def 1.1.10: Man sagt, ein LGS ist in Zeilenstufenform, wenn die Koeff-Matrix die folgende Form hat:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c}
\overbrace{0 & \cdots & 0}^{\text{optional}} & \boxed{1} & \overbrace{* & \cdots}^{\text{optional}} & \overbrace{\cdots & \cdots}^{\text{optional}} & \cdots & \cdots & \overbrace{\cdots & *}^{\text{optional}} & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & \boxed{1} & * & \cdots & \cdots & & * & * \\
0 & \cdots & & & & & 0 & 0\cdots 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \cdots * & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & 0 & * \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & 0 & *
\end{array}\right)
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{optional}$$

Hierbei steht * für eine beliebige Zahl. Die $\boxed{1}$ nennt man
<u>Pivot-Elemente</u>.

<u>Bsp:</u>
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{1} & 3 & \frac{1}{4} & \sqrt{2} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 9 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

<u>Satz 1.1.11 (Gauß-Elimination):</u> Jedes LGS lässt sich durch (endl. viele) elem. Transf. in Zeilenstufenform bringen.
!! ZSF

<u>Bew:</u> „Beweis durch Algorithmus":
sei also L gegeben mit Koeff-Matrix
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Links vom Strich stehen nur Oen

- Falls $a_{ij} = 0$ ist für alle i und j: nichts zu tun. (L ist bereits in ZSF.)
- Sonst:
  - Sei i minimal so dass die i-te Spalte nicht komplett 0 ist.
  - Wähle j s.d. $a_{ji} \neq 0$.
  - Falls $j \neq 1$: Tausche die Zeilen 1 und j. Jetzt ist $a_{1i} \neq 0$.
  - Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{1}{a_{1i}}$. Jetzt ist $a_{1i} = 1$
  - Für jedes $j > 1$: Ersetze L_j durch $L_j + (-a_{ji}) \cdot L_1$.

Bsp.:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$i = 3$

Wähle $j = 2$. (Könnte auch $j = 3$ wählen.)
Dann $a_{ji} = a_{23} = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$j = 2$: Ersetze L_2 durch $L_2 + (-0) \cdot L_1$
(keine Änderung)
$j = 3$: Ersetze L_3 durch $L_3 + (-2) \cdot L_1$

Erhalte $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2-2\cdot 1 & 0-2\cdot\frac{2}{3} & 2-2\cdot\frac{2}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

Danach ist $a_{ji} = 0$ für alle $j > 1$.
Also sind die Spalten 1 bis i schon wie gewünscht, und die 1. Zeile auch.

Wiederhole alles ohne die 1. Zeile und ohne die ersten i Spalten.

etc.
Wenn keine Zeilen oder Spalten mehr übrig sind, ist das LGS in ZSF.

□

Satz 1.1.12: Sei $\underline{L}$ ein LGS in Zeilenstufenform. Dann gilt:

(a) Existiert in der Koeff-Matrix von $\underline{L}$ eine Zeile der Form $(0 \cdots\cdots 0 \mid b_i)$ mit $b_i \neq 0$, so besitzt $\underline{L}$ keine Lsg.

Entspricht der Gleichung $\underbrace{0x_1 + \ldots + 0\cdot x_n}_{=0} = b_i$

(b) Existiert keine solche Zeile, so hat $\underline{L}$ Lösungen.
Sämtliche Lösungen lassen sich erhalten, indem man der Reihe nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ folgendermaßen wählt:
Wähle x_j wie folgt (für $j = n, n-1, \ldots, 1$):

(i) Falls die j-te Spalte kein Pivot-Element enthält, kann x_j beliebig gewählt werden.

(ii) Enthält die j-te Spalte ein Pivot-Element in Zeile i, so betrachte die i-te Zeile.

Entspricht der Gl.
$x_j + a_{i,j+1} x_{j+1} + \ldots + a_{i,n} x_n = b_i$

$(0 \cdots\cdots 0 \ 1 \ a_{i,j+1} \cdots a_{i,n} \mid b_i)$

Stelle j

sind schon gewählt

Setze $x_j = b_i - a_{i,j+1}\cdot x_{j+1} - \ldots - a_{i,n}\cdot x_n$

Bem: • Grüne Anmerkungen zeigen: Es gibt höchstens die behaupteten Lösungen.

• Bleibt $\underset{\sim}{\text{z.z.}}$: Wenn $x_1, \dots, x_n$ wie im Satz gewählt wurden, ist dies tatsächlich eine Lsg, d.h. alle Gleichungen sind erfüllt.

= „zu zeigen"

• Zeilen mit Pivot-Element: Hat eine Zeile ein Pivot-Element in Spalte j, so wurde x_j so gewählt, dass diese Gleichung erfüllt ist.

• Zeilen ohne Pivot-Element haben die Form $(0 \cdots\cdots 0 \mid b_i)$, und da wir nicht im Fall (a) sind, ist $b_i = 0$. Also ist die Gleichung „$0=0$". □

Bsp:

Pivot-Elem.

$$\underline{L} = \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Alle Lösungen:	Bsp-Lsg:
• x_6 beliebig	$x_6 = 1$ (Wahl)
• $x_5 = 2 - 3 \cdot x_6$	$x_5 = -1$
• x_4 beliebig	$x_4 = 3$ (Wahl)
• $x_3 = 1 - x_5 - x_6$	$x_3 = 1$
• $x_2 = -1 - 3x_3 + 2x_4$	$x_2 = 2$
• x_1 beliebig.	$x_1 = 9$ (Wahl)

Jede Zeile hat höchstens ein Pivot-Element, d.h. wenn es mehr Spalten als Zeilen gibt, existieren Spalten ohne Pivot-Element. Das bedeutet: Wenn wir bei 1.1.12 in Fall (b) sind, gibt es Var, die beliebig gewählt werden können. Also:

<u>Korollar 1.1.13:</u> Sei $\underline{L}$ ein LGS mit mehr Variablen als Gleichungen.

(a) Ist $\underline{L}$ homogen, so besitzt $\underline{L}$ nicht-triviale Lösungen (d.h. Lösungen $\neq (0, \dots, 0)$)

(b) Für beliebige $\underline{L}$: Falls $\underline{L}$ überhaupt Lösungen besitzt, dann sogar unendlich viele.

Ziele der LA: Theorie der linearen Gleichungen

- Als erstes: Formalismus präzise machen
- Was sind Zahlen? Genauer: Welche Eigenschaften müssen Zahlen haben, damit obiges funktioniert? $\rightsquigarrow$ „Körper"
- Formalismus zum rechnen mit Lösungen, Zahlentupeln, Gleichungen $\rightsquigarrow$ Vektorraum
- Anzahl frei wählbarer Variablen $\rightsquigarrow$ „Dimension" des Lösungsraums
- „lineare Abbildung"