Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 12

Abgabe der Lösungen am 06.07.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu beiden Aufgaben 12.1 und 12.2 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 12.1 (6 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei $\mathbf{PGL}_n$ bzw. $\mathbf{PSL}_n$ als Bild von $\mathbf{GL}_n$ bzw. $\mathbf{SL}_n$ unter der adjungierten Darstellung definiert.

(a) Bestimmen Sie für $n = 2$ die Koordinatenalgebren für $\mathbf{PGL}_n$ und $\mathbf{PSL}_n$.

(b) Erläutern Sie, wieso $\mathbf{PGL}_2$ und $\mathbf{PSL}_2$ als algebraische Gruppen isomorph sind.

(c) Zeigen Sie: Als abstrakte Gruppen sind $\mathbf{PGL}_n$ und $\mathbf{GL}_n/Z(\mathbf{GL}_n)$ isomorph, ebenso wie $\mathbf{PSL}_n$ und $\mathbf{SL}_n/Z(\mathbf{SL}_n)$.

(d) Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{char}(k) = 0$ oder zumindest $\mathrm{char}(k) \nmid n$, so sind $\mathbf{PGL}_n$ und $\mathbf{PSL}_n$ als algebraische Gruppen isomorph zueinander.

(e) Zeigen Sie: Gilt $n = \mathrm{char}(k) > 0$, so ist $Z(\mathbf{SL}_n) = \{1\}$, aber $\mathbf{SL}_n$ und $\mathbf{PSL}_n$ sind als algebraische Gruppen nicht isomorph zueinander.

Aufgabe 12.2 (6 Punkte)

Gemäß des Klassifikationssatzes ist eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe G bis auf Isomorphie eindeutig durch das zugehörige Wurzeldatum $\Psi(G,T)$ bestimmt, wobei T einen maximalen Torus von G bezeichnet.
Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Aussage alle zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppen der Dimension 4 und geben Sie die zughörigen Wurzeldaten konkret an.

(*Hinweis*: Welche geeigneten Gruppen fallen Ihnen direkt ein? Die Konstruktion von $\Psi(G,T)$ wird in Springers Buch unter 7.4.3 erläutert.)

Aufgabe 12.3

Sei G eine zusammenhängende halbeinfache lineare algebraische Gruppe vom Rang 1. Zeigen Sie (ohne Verwendung des Klassifikationssatzes 7.2.4), daß G neben sich selbst höchstens endliche abgeschlossene Normalteiler besitzt. Folgern Sie daraus: $G = [G,G]$.