

Darstellungstheorie reductiver Gruppen – Blatt 8

Abgabe der Lösungen am 08.06.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.1, 8.3 und 8.4 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 8.1 (2 Punkte)

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe, deren Elemente allesamt halbeinfach seien. Zeigen Sie, daß G ein Torus ist.

(*Hinweis:* Betrachten Sie eine Borelsche Untergruppe von G .)

Aufgabe 8.2

Sei G eine zusammenhängende auflösbare lineare algebraische Gruppe der Dimension n . Zeigen Sie: Es existiert eine Kette $1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ von abgeschlossenen zusammenhängenden Normalteilern von G dergestalt, daß jeder Quotient G_i/G_{i-1} jeweils isomorph zu \mathbf{G}_m oder \mathbf{G}_a ist.

Aufgabe 8.3 (2 Punkte)

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Die abgeschlossene Untergruppe $H \leq G$ enthalte einen maximalen Torus T von G . Zeigen Sie: $N_G(H) \subseteq H^\circ N_G(T)$.

Aufgabe 8.4 (8 Punkte)

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Ein Element $g \in G$ heißt *regulär*, falls für die lineare Transformation $\text{Ad}(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 minimal unter allen Elementen von G ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Menge der regulären Elemente ist offen und dicht in G .
- (b) Ein Element $g \in G$ mit Jordan-Zerlegung $g = g_s g_u$ ist regulär genau dann, wenn sein halbeinfacher Teil g_s regulär ist.
- (c) Ein halbeinfaches Element $g \in G$ ist regulär genau dann, wenn der Zentralisator $C_G(g)$ minimale Dimension hat.
- (d) Ein halbeinfaches Element $g \in G$ ist regulär genau dann, wenn $C_G(g)^\circ$ eine Cartansche Untergruppe von G ist.

(*Hinweise:* Verwenden Sie für (c) ein geeignetes Resultat aus Abschnitt 5.4 und für (d) geeignete Resultate aus Abschnitt 6.4 der Vorlesung.)