Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 7

Abgabe der Lösungen am 01.06.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.1 und 7.3 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 7.1 (8 Punkte)

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $G = \mathbf{GL}_n$ und $H = \mathbf{O}_n = \{g \in \mathbf{GL}_n \mid g^{\mathrm{tr}}\, g = \mathrm{Id}\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $S^\times$ aller invertierbaren symmetrischen $n \times n$-Matrizen bildet eine affine Varietät der Dimension $n(n+1)/2$.

(b) Jede symmetrische $n \times n$-Matrix über k läßt sich als $X^{\mathrm{tr}} + X$ mit $X \in \mathfrak{gl}_n$ schreiben.

(c) Es gilt $G/H \cong S^\times$.

(d) Folgern Sie, daß $\dim \mathbf{O}_n = n(n-1)/2$ ist.

(*Hinweis zu* (c): Betrachten Sie die Operation von G auf $S^\times$, die durch $g.x = g^{\mathrm{tr}} x g$ für $g \in G$ und $x \in S^\times$ gegeben ist, und zeigen Sie, daß der Morphismus $\pi\colon G \to S^\times$, $g \mapsto g^{\mathrm{tr}}\, g$ separabel ist. Bestimmen Sie dazu $d\pi_1$, und nutzen Sie (b).)

Aufgabe 7.2

Führen Sie die Aufgabe 7.1 entsprechend für die symplektische Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n}$ anstelle von $\mathbf{O}_{2n}$ aus. Welche Dimension hat $\mathbf{Sp}_{2n}$?

Aufgabe 7.3 (2 Punkte)

Geben Sie eine endliche auflösbare Untergruppe von $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ an, die nicht konjugiert zu einer Untergruppe der Gruppe der inverierbaren oberen Dreiecksmatrizen ist. Begründen Sie Ihre Antwort.