Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 6

Abgabe der Lösungen am 25.05.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 6.1 und 6.3 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbf{GL}_n$. Zeigen Sie:

(i) Die Gruppe $B = \mathbf{T}_n$ der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen ist eine Borelsche Untergruppe von G.

(ii) Die Borelschen Untergruppen von G sind gerade die Stabilisatorgruppen der vollständigen Flaggen von Untervektorräumen

$$\{0\} = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_{n-1} \subsetneqq V_n = V, \qquad \text{wobei also } \dim V_i = i \text{ für } 0 \le i \le n,$$

bezüglich der Standardoperation von G auf $V = k^n$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie in (i) die natürliche Operation von G auf $\mathbb{P}^{n-1}$ und zeigen Sie, per Induktion nach n, daß G/B vollständig, also $B \le G$ parabolisch ist.)

Aufgabe 6.2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = k^{2n}$ der Standardvektorraum, ausgestattet mit der nicht-ausgearteten alternierenden Bilinearform

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) \qquad \text{für } \underline{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})^{\mathrm{tr}}, \underline{y} = (y_1, \ldots, y_{2n})^{\mathrm{tr}} \in V.$$

Bestimmen Sie, ähnlich wie in Aufgabe 6.1, einen expliziten Vertreter und eine allgemeine Kennzeichnung der Borelschen Untergruppen der symplektischen Gruppe

$$\mathbf{Sp}_{2n} = \{ g \in \mathbf{GL}_{2n} \mid \forall \underline{x}, \underline{y} \in V : \langle g\underline{x}, g\underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \}.$$

Welche Dimensionen haben die Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n}$ und ihre Borelschen Untergruppen?

(*Hinweis*: Verwenden Sie, daß eine Borelsche Untergruppe von $\mathbf{Sp}_{2n}$ jedenfalls in einer Borelschen Untergruppe von $\mathbf{GL}_{2n}$ enthalten ist. Wählen Sie eine geeignete maximale Flagge von total-isotropen Untervektorräumen von V und ergänzen Sie diese geschickt zu einer vollständigen Flagge von Untervektorräumen von V.)

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Sei G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe und $B \le G$ eine Borelsche Untergruppe. Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ mit $\sigma|_B = \mathrm{id}_B$. Zeigen Sie: $\sigma = \mathrm{id}_G$.