Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 5

Abgabe der Lösungen am 18.05.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 5.1 und 5.3 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Weiter sei $A = \{f \in k[G] \mid \forall g \in G\ \forall h \in H : f(gh) = f(g)\}$. Zeigen Sie:

(i) Ist G/H affin, so ist $k[G/H]$ in natürlicher Weise isomorph zu A; folglich ist A eine endlich erzeugte k-Algebra und A trennt die Nebenklassen von H in G voneinander, d. h., für $xH \neq yH$ existiert stets ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Ist A eine endlich erzeugte k-Algebra und trennt A die Nebenklassen von H in G voneinander, so folgt im allgemeinen noch nicht, dass G/H affin ist.

(*Hinweis*: Verwenden Sie für (ii) die Aufgabe 4.4.)

Aufgabe 5.2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $G = \mathbf{GL}_n$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$: Das Differential der adjungierten Darstellung $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ ist gegeben durch

$$d\mathrm{Ad}(X).Y = [X,Y] = XY - YX \qquad \text{für } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Wie verallgemeinert sich diese Aussage für beliebige lineare algebraische Gruppen?

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $H \leq G$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe, deren zugrunde liegende Varietät vollständig ist, so gilt $H \leq Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : xg = gx\}$.

(b) G besitzt eine eindeutig bestimmte maximale zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe, deren zugrunde liegende Varietät vollständig ist.

Aufgabe 5.4

Zeigen Sie möglichst direkt aus der Definition: $B = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, d \in k \text{ mit } ad = 1\}$ ist eine minimale parabolische Untergruppe von $\mathbf{SL}_2$.