Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen am 11.05.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.4, 4.5 und 4.6 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 4.1

Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $1 \le d \le \dim V$. Man betrachte die kanonische Darstellung $\varphi\colon \mathbf{GL}(V) \to \mathbf{GL}(\bigwedge^d V)$, $\varphi(x).(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = x.v_1 \wedge \ldots \wedge x.v_d$. Zeigen Sie: $d\varphi\colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\bigwedge^d V)$ ist gegeben durch

$$d\varphi(X).(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = \sum_{i=1}^d v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge X.v_i \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_d.$$

Aufgabe 4.2

Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum, und $\pi\colon V \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$, $v \mapsto [kv]$ die kanonische Projektion. Erläutern Sie die Aussage „$\mathrm{Kern}(d\pi_v) = kv$“.

Aufgabe 4.3

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $H \le G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen paarweise äquivalent sind:

(i) G/H ist irreduzibel; (ii) H schneidet jede irred. Komp. von G; (iii) $G = G^\circ H$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Sei $G = \mathbf{SL}_2$. Zeigen Sie:

(a) Für $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,d \in k \text{ mit } ad = 1\}$ ist $G/H \cong \mathbb{P}^1$.

(b) Für $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid b \in k\}$ ist $G/H \cong \mathbb{A}^2 \smallsetminus \{0\}$.

Aufgabe 4.5 (4 Punkte)

Für $i \in \{1,2\}$ sein G_i eine lineare algebraische Gruppen mit abgeschlossener Untergruppe $H_i \le G_i$. Zeigen Sie:

$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2.$$

Aufgabe 4.6 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Definieren Sie einen bijektiven Morphismus von $\mathbf{GL}_n/\mathbf{O}_n$ auf die Varietät der nicht-ausgearteten symmetrischen $n \times n$-Matrizen.
Folgern Sie damit: $\dim(\mathbf{O}_n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.