Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen am 04.05.2016 in der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.4 und 3.5 ab, die übrigen Aufgaben bereiten Sie eigenständig für die Übungsstunde vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 3.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist der Automorphismus $\sigma\colon \mathbf{GL}_n \to \mathbf{GL}_n$, $x \mapsto (x^{-1})^{\mathrm{tr}}$ halbeinfach? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbf{GL}_n$. Weiter sei $s \in G$ halbeinfach. Beweisen Sie ausführlich: Die Liealgebra der abgeschlossenen Untergruppe $G_s = C_G(s) = \{x \in G \mid sx = xs\}$ ist gleich

$$\mathfrak{g}_s = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{Ad}(s)(X) = X\}.$$

Aufgabe 3.3

Sei G eine lineare algebraische Gruppe und $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ halbeinfach. Erläutern Sie, weshalb dann auch die lineare Abbildung $d\sigma\colon \mathrm{T}G_1 \to \mathrm{T}G_1$ halbeinfach ist.

Aufgabe 3.4 (6 Punkte)

Für eine lineare algebraische Gruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ seien, wie in der Vorlesung, $G_\sigma = \{x \in G \mid \sigma(x) = x\}$ und $\mathfrak{g}_\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\sigma(X) = X\}$.

(a) Sei $\mathrm{char}(k) = 2$. Seien $G = \mathbf{SL}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ und $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie: Für den inneren Automorphismus $\sigma\colon G \to G$, $x \mapsto uxu^{-1}$ gilt $L(G_\sigma) \neq \mathfrak{g}_\sigma$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $G = \mathbf{GL}_n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Sei $g \in G$ und $\sigma\colon G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ der zugehörige innere Automorphismus. Zeigen Sie: $L(G_\sigma) = \mathfrak{g}_\sigma$.
(*Hinweis*: Nutzen Sie die explizite Beschreibung der adjungierten Operation von G auf $\mathfrak{g}$ sowie die additive Jordanzerlegung für Endomorphismen. In Aufgabe 3.2 erzielte Ergebnisse dürfen Sie ohne erneuten Beweis benutzen.)

Aufgabe 3.5 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die Konjugationsklasse von $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbf{GL}_2$ ist nicht abgeschlossen.

(b) Allgemeiner seien $n \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbf{GL}_n$ unipotent, also $X = u - 1$ eine nilpotente Matrix. Verwenden Sie die Jordan-Normalform, um einen Cocharakter $\lambda\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{GL}_n$ zu definieren dergestalt, dass für $a \in k^\times$ gilt: $\lambda(a)X\lambda(a)^{-1} = a^2 X$. Folgern Sie, dass das Einselement 1 im Abschluß der Konjugationsklasse von u in $\mathbf{GL}_n$ liegt.