Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2016

Darstellungstheorie reduktiver Gruppen – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 20.04.2016 in der Vorlesung

Die Aufgaben sind zumeist Präsenzaufgaben für die ersten Übungsstunden. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 1.4 und 1.6 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/GruppenII_SS16/`.

Alle Varietäten seien über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert.

Aufgabe 1.1

Sei $\varphi: X \to Y$ ein birationaler Morphismus zwischen irreduziblen Varietäten X, Y. Wie in der Vorlesung beschrieben (Lemma 5.1.2), impliziert dies, daß φ einen Isomorphismus zwischen nicht-leeren offenen Teilmengen von X und Y vermittelt.
Erläutern Sie im Detail, wieso man sich im Beweis dieser Aussage auf den Fall beschränken darf, daß X und Y affin sind.

Aufgabe 1.2

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Betrachten Sie für $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ und $Y = \mathbb{P}^1$ die Abbildung

$$\varphi: X \to Y, \quad \varphi(x,y) = \begin{cases} (1+x : 2y) & \text{für } (x,y) \neq (-1,0), \\ (0:1) & \text{für } (x,y) = (-1,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\varphi: X \to Y$ ist ein birationaler Morphismus zwischen irreduziblen Varietäten. Bestimmen Sie weiter nicht-leere offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, zwischen denen φ einen Isomorphismus vermittelt.

Aufgabe 1.3

Erläutern Sie, wieso sich die Eigenschaften (i) und (ii) in Satz 5.1.6 der Vorlesung, bzgl. geeigneter offener Teilmengen, von dominanten Morphismen $\psi_1: X \to Z$ und $\psi_2: Z \to Y$ auf die Hintereinanderausführung $\psi_2 \circ \psi_1: X \to Y$ vererben.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{A}^1$ und $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 = y^3\}$. Zeigen Sie: Y ist irreduzibel; weiter ist $\varphi: X \to Y$, $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ ein bijektiver birationaler Morphismus, aber kein Isomorphismus.

Aufgabe 1.5

Zeigen Sie: der Morphismus $\varphi: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2)$ ist birational aber nicht offen. Beschreiben Sie weiter die irreduziblen Komponenten der Fasern $\varphi^{-1}\{y\}$, $y \in \mathbb{A}^2$.

Aufgabe 1.6 (4 Punkte)

Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Betrachten Sie $\varphi: \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x, xy, z)$, sowie die Teilmengen $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \mid y^2 = 1+x\}$ und $Y = \varphi X$ von $\mathbb{A}^3$.
Zeigen Sie: $X, Y \subseteq \mathbb{A}^3$ sind irreduzible abgeschlossene Untervarietäten der Dimension 2. Weiter ist $Y' = \{(x,y,z) \in Y \mid y = xz,\ z^2 = 1+x\} \subseteq Y$ eine irreduzible abgeschlossene Untervarietät der Dimension 1. Schließlich besitzt $X' = X \cap \varphi^{-1}(Y')$ irreduzible Komponenten unterschiedlicher Dimensionen 0 und 1. (Fertigen Sie dazu Skizzen im $\mathbb{R}^3$ an.)