Einführung in die Topologie

Holger Kammeyer (holger.kammeyer@hhu.de)

Inhalte:

I Grundbegriffe der Topologie

I.1 Topologische Räume

Def. I.1.1 Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (die sogenannten offenen Teilmengen), sodass gilt:

1.) Ist $\{U_i\}_{i\in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen, so ist $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

2.) Sind U_1 und U_2 offen, so auch $U_1 \cap U_2$.

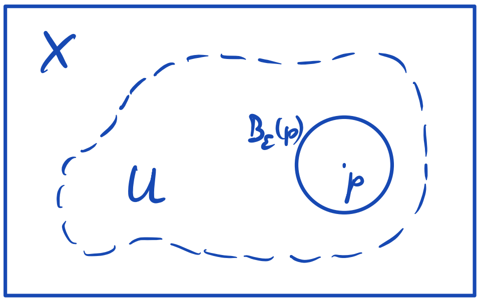
3.) Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen.

- Man nennt $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X.
- Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A$ offen ist.

Bspe.

- Auf jeder Menge X ist $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ (die Klumpentopologie oder triviale Topologie) und $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X) = \{U : U \subseteq X\}$ (die diskrete Topologie) eine Topologie auf X.

- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist
$$\mathcal{O}(d) = \{U \subseteq X : \text{Für alle } p \in U \text{ existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ sd. } B_\varepsilon(p) \subseteq U\}$$
die durch d induzierte Topologie auf X.
Hier: $B_\varepsilon(p) = \{x \in X : d(x,p) < \varepsilon\}$



Nachweis der Axiome:

1.) und 3.) sind klar.

2.) Sei $p \in U_1 \cap U_2$. Für $i = 1, 2$ gibt es ε_i mit $B_{\varepsilon_i}(p) \subseteq U_i$. Dann gilt $B_{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(p) \subseteq U \cap V$.

Für $X = \mathbb{R}^n$ mit $d_e(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$ nennen wir $\mathcal{O}(d_e)$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

Es gilt $\mathcal{O}_{trivial} \subsetneq \mathcal{O}(d_e) \subsetneq \mathcal{O}_{diskret}$ $(n \geq 1)$.

Beachte $\bigcap_{n \geq 1} B_{1/n}(0) = \{0\}$ ist nicht offen.

<u>Frage 1</u>: Wird jede Topologie von einer Metrik induziert?

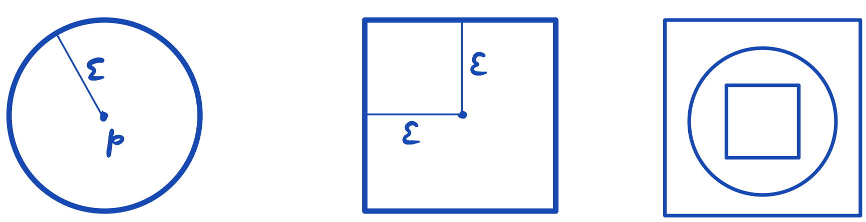
Nein: Sei $X = \{p, q\}$. Für jede Metrik d auf X ist $\{p\}$ offen, da $B_r(p) = \{p\}$ für $r = d(p,q) > 0$. Also ist $(X, \mathcal{O}_{trivial})$ nicht metrisierbar.

<u>Frage 2</u>: Falls eine Topologie von einer Metrik induziert wird, ist diese eindeutig?

Nein: $X = \mathbb{R}^n$ mit $d_m(x,y) = \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\}$

<u>Beh.</u>: $\mathcal{O}(d_m) = \mathcal{O}(d_e)$

<u>Bew.</u>: $B_\varepsilon(p)$ für d_e: $\quad B_\varepsilon(p)$ für d_m:



$\square$

Bemerkung: Anders als in einem metrischen, kann man in einem top. Raum nicht mehr ausdrücken, wie nah sich zwei Punkte $x, y \in X$ sind. Man kann aber noch ausdrücken, dass eine Folge $(x_i)_{i=1}^\infty$ von Punkten $x_i \in X$ einem Punkt $y \in X$ beliebig nahe kommt:

$\lim_{i\to\infty} x_i = y \quad :\Leftrightarrow$ Für jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $y \in U$ gibt es ein i_0 mit $x_i \in U$ für $i \geq i_0$.

Def I.1.2 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum, $p \in X$, $B \subseteq X$.

- Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt Umgebung von p, falls es eine offene Menge $U \subseteq V$ mit $p \in U$ gibt.
- Der Abschluss von B ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von B, also $\overline{B} := \bigcap_{A \supseteq B \text{ abg.}} A$.
- Das Innere von B ist die größte offene Untermenge von B, also $\mathring{B} := \bigcup_{U \subseteq B \text{ offen}} U$.

Def. I.1.3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum und $B \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\mathcal{O}|_B := \{ U \cap B : U \subseteq X \text{ offen} \}$ die Teilraumtopologie.

Bsp.: $X = \mathbb{R}$ mit Standardtopologie, $B = [0, 2)$. Dann ist $[0, 1) = (-1, 1) \cap [0, 2)$ offen in der Teilraumtopologie von B, aber nicht in X.

$$\overset{\circ}{[0,1)} = \begin{cases} [0,1) & \text{bzgl. } \mathcal{O}|_B . \\ (0,1) & \text{" Std. top.} \end{cases}$$

$$\overline{[0,1)} = [0,1] \text{ bzgl. } \mathcal{O}|_B \text{ und Std. top.}$$

Def. I.1.4 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum. Dann heißt eine Menge offener Mengen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ (Sub)-Basis der Topologie, falls jede offene Menge U Vereinigung von (endlichen Schnitten von) Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Bsp. · $\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(p) : \varepsilon > 0, p \in \mathbb{R}^n \}$ ist eine Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = \{ B_\varepsilon(p) : \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}, p \in \mathbb{Q}^n \}$ ist eine abzählbare Basis

· $\mathcal{B} = \{ \{x\} : x \in X \}$ ist Basis der diskreten Topologie auf X.

Sei X eine Menge, S eine Menge von Teilmengen von X. Dann ist

$$\mathcal{O}(S) = \left\{ U \subseteq X : \begin{array}{l} U \text{ ist Vereinigung endlicher} \\ \text{Schnitte von Mengen aus } S \end{array} \right\}$$

die von S erzeugte Topologie mit Subbasis S.

Def. I.1.5 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein top. Raum, $x_0 \in X$. Eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt Umgebungsbasis von x_0, falls jede Umgebung V von x_0 eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ enthält.

Bsp.: Ist (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, so ist $\mathcal{U} = \{ B_r(x_0) : r \in \mathbb{Q}_{>0} \}$ eine Umgebungsbasis von x_0, d.h. metrische Räume erfüllen das

1. Abzählbarkeitsaxiom: Jeder Punkt hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Wie oben gesehen, erfüllt $(\mathbb{R}^n, d_e)$ sogar das

2. Abzählbarkeitsaxiom: Es gibt eine abzählbare Basis der Topologie.

Def. I.1.6 Ein top. Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt separabel, falls es eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ gibt, die dicht ist, d.h. $\overline{A} = X$.

Lemma I.1.7 Zweitabzählbar $\Rightarrow$ separabel.

Bew.: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis. Wähle je einen Punkt für jedes $\emptyset \neq U \in \mathcal{B}$ und erhalte so die Menge $A \subseteq X$. Da $X \setminus \overline{A}$ offen und $\mathcal{B}$

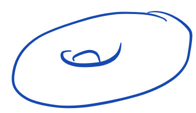
Basis ist, gibt es $U_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$ mit $X \setminus \bar{A} = \bigcup_{i \in I} U_i$, also $U_i \cap A = \emptyset$, d.h. $U_i = \emptyset$, somit $X \setminus \bar{A} = \emptyset$. $\square$

I.2 Summen und Produkte

Sei $X \sqcup Y$ die disjunkte Vereinigung von Mengen X und Y.

Def. I.2.1 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ top. Räume. Dann ist $(X \sqcup Y, \mathcal{O}(\mathcal{O}_X \sqcup \mathcal{O}_Y))$ die top. Summe von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

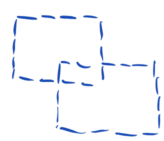
Notiz: $X, Y \subseteq X \sqcup Y$ sind zugleich offen und abgeschlossen.



Def. I.2.2 Das Produkt von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist

$$(X \times Y, \mathcal{O}(\{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}))$$

Notiz: Es gilt $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, also ist $\{U \times V : U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ eine Basis, aber i. A. keine Topologie



Sei nun $(X_i, \mathcal{O}_i)$ mit $i \in I$ eine beliebige Familie top. Räume.

Def. I.2.3 Die top. Summe von $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ist $\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, \mathcal{O}\left(\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i\right)\right)$.

Def. I.2.4 Das Produkt von $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist

$$\left(\prod_{i\in I} X_i,\ \mathcal{O}\left(\left\{ pr_i^{-1}(U) : U \in \mathcal{O}_i,\ i \in I\right\}\right)\right),$$

wobei $pr_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i$ die Projektion auf den i-ten Faktor bezeichnet.

Notiz: Für $I = \{1,2\}$ ist $pr_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2$, $pr_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2$ und $U_1 \times X_2 \cap X_1 \times U_2 = U_1 \times U_2$, also ergibt sich die vorherige Def.

Warum nicht $\mathcal{O}' = \mathcal{O}\left(\left\{\prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{O}_i\right\}\right)$?
Später: universelle Eigenschaft des Produkts. Jetzt:

Bsp.: $X_i = \left(\{0,1\}, \mathcal{O}_{\text{diskret}}\right)$, $i \in \mathbb{N}$. Dann enthält $\mathcal{O}'$ die einpunktigen Mengen von $\prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,1\}$, ist also diskret. Somit divergiert die Folge $x_k = (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, 0, 0, \dots)$ bzgl. $\mathcal{O}'$.

In der Produkttopologie bilden Zylindermengen
$$\left\{ U_1 \times U_2 \times \cdots : U_i \in \mathcal{O}_i,\ U_i = X_i \text{ für fast alle } i\right\}$$
eine Basis und daher $\lim_{k\to\infty} x_k = (1, 1, \dots)$.

I.3 Stetige Abbildungen

Def. I.3.1 Eine Abbildung $f: X \to Y$ topologischer Räume heißt *stetig*, wenn für jede offene Menge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Satz I.3.2 Eine Abb. $f: M \to N$ metrischer Räume ist g.d. stetig bzgl. der induzierten Topologien, wenn f stetig nach ε-δ-Definition ist.

Bew.: Sei f wie oben stetig, $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $U := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq M$ offen und $x \in U$, also gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$, also $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$.

Sei umgekehrt f stetig nach ε-δ-Def und sei $V \subseteq N$ offen. z.z.: $f^{-1}(V) \subseteq M$ ist offen. Sei also $x \in f^{-1}(V)$. Dann gilt $f(x) \in V$ und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Also gibt es $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$, d.h. $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$. $\square$

Lemma I.3.3 Sei $\mathcal{B}$ eine Subbasis von Y. Dann ist $f: X \to Y$ g.d. stetig, wenn $f^{-1}(U)$ für alle $U \in \mathcal{B}$ offen ist.

Bew.: Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann gilt $U = \bigcup_{i \in I} U_1^i \cap \ldots \cap U_{n_i}^i$ für geeignete $U_j^i \in \mathcal{B}$ und $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_1^i) \cap \ldots \cap f^{-1}(U_{n_i}^i)$ ist offen. $\square$

Hausaufgabe: Weitere Charakterisierungen.

Seien $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ stetig. Definiere

$$f \sqcup g : X \sqcup Y \to Z, \quad x \in X \mapsto f(x), \quad y \in Y \mapsto f(y).$$

Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann ist $(f \sqcup g)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U) \subseteq X \sqcup Y$ offen, also $f \sqcup g$ stetig.

Die Inklusionen $i_X : X \to X \sqcup Y$, $i_Y : Y \to X \sqcup Y$ sind ebenfalls stetig: $i_X^{-1}(U \cup V) = U$.

Dies zeigt die universelle Eigenschaft der top. Summe

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] & X \sqcup Y \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

(alle Abbildungen stetig)

Seien $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ stetig. Definiere

$$f \times g : Z \to X \times Y, \quad z \mapsto (f(x), f(y)).$$

Seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offen. $(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subseteq Z$ offen, also $f \times g$ stetig.

Die Projektionen $pr_X : X \times Y \to X$, $pr_Y : X \times Y \to Y$ sind stetig. Universelle Eigenschaft des Produkts:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "pr_X"] \arrow[r, "pr_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Unendliche Version: Zu $\{f_i : Z \to X_i\}$ ex. genau ein $f : Z \to \prod_i X_i$ mit

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, dashed, "f"] \\ X_i & \prod_i X_i \arrow[l, "pr_{X_i}"] \end{tikzcd}.$$

Weitere Eigenschaften:

- Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ stetig, so auch $g \circ f: X \to Z$.
- X: top. Raum, dann ist id_X stetig.
- Konstante Abbildungen sind stetig.
- X: top. Raum, $B \overset{i}{\subseteq} X$, $f: X \to Y$ stetig. Dann ist $f|_B: B \to Y$ stetig. ($f|_B = f \circ i$)
- Eine Abb. $f: X \to Y$ ist immer stetig, wenn X diskret oder Y verklumpt ist.

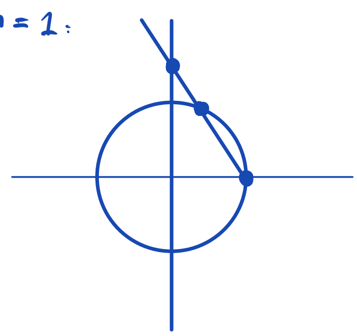
Def. I.2.4 Eine stetige Bijektion $f: X \to Y$ mit stetiger Umkehrabbildung heißt Homöomorphismus.

Gibt es einen Homöo. $f: X \to Y$, heißen X und Y homöomorph (Notation: $X \cong Y$). Bspe.:

- $(0,1) \cong (1,\infty)$, $\quad x \mapsto \frac{1}{x}$, $y \mapsto \frac{1}{y}$
- $(0,1) \cong (-\infty,\infty)$, $\quad x \mapsto \tan(\pi(x - 1/2))$,
  $y \mapsto 1/\pi \arctan(y) + 1/2$

- $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. $\quad S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\} \cong \mathbb{R}^n$

$n = 1$:



$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0}\right)$$

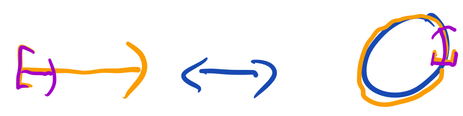
$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{s^2-1}{s^2+1}, \frac{2y_1}{s^2+1}, \dots, \frac{2y_n}{s^2+1}\right)$$

mit $s^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$.

„Stereographische Projektion"

Warnung: Eine stetige Bijektion muss kein Homöomorphismus sein. Bspe.:

- $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{diskret}}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$
- $[0,1) \longrightarrow S^1, \quad t \longmapsto \exp(2\pi i t)$



I.4 Zusammenhang

Def I.4.1 Ein top. Raum X heißt zusammenhängend, wenn X keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere offene Mengen zulässt.
($\Leftrightarrow$ Nur $\emptyset$ und X sind zugleich offen und abg.)

Bspe
- $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend (s.u.)
- $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ ist unzusammenhängend

Satz I.4.2 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt: I ist zshgd. $\Leftrightarrow$ I ist ein Intervall.

Bew. „$\Rightarrow$": Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es $a < s < b$ mit $a, b \in I$ und $s \notin I$. Dann ist $((-\infty, s) \cap I) \cup ((s, \infty) \cap I)$ eine disjunkte Zerlegung von I in nichtleere offene Mengen.

„$\Leftarrow$": Sei $I = A \cup B$ mit $A, B \subseteq$ offen in I und $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Wähle $a \in A$, $b \in B$, o. B. d. A. $a < b$, und setze $s := \inf\{x \in B : x > a\}$.

Sei U eine Umgebung von s. Dann gilt $U \cap B \neq \emptyset$.
Aber auch $U \cap A \neq \emptyset$, denn $s \geq a$ und falls $s > a$, dann ist $(a,s) \cap B = \emptyset$ und weil $(a,s) \subseteq I = A \cup B$, folgt $(a,s) \subseteq A$.
Wir haben also einen Häufungspunkt s von A und B.
Es gilt $s \in I = A \cup B$, o.B.d.A. $s \in A$.
Weil $A \subseteq I$ offen, gibt es $U \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $A = U \cap I$. Weil $s \in U$, gilt $U \cap B \neq \emptyset$, also gibt es $b' \in U \cap B \subseteq U \cap I = A$, d.h. $b' \in A \cap B$, Widerspruch. $\square$

Def I.4.3 Ein top. Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls es für alle $x, y \in X$ eine stetige Abb. $\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

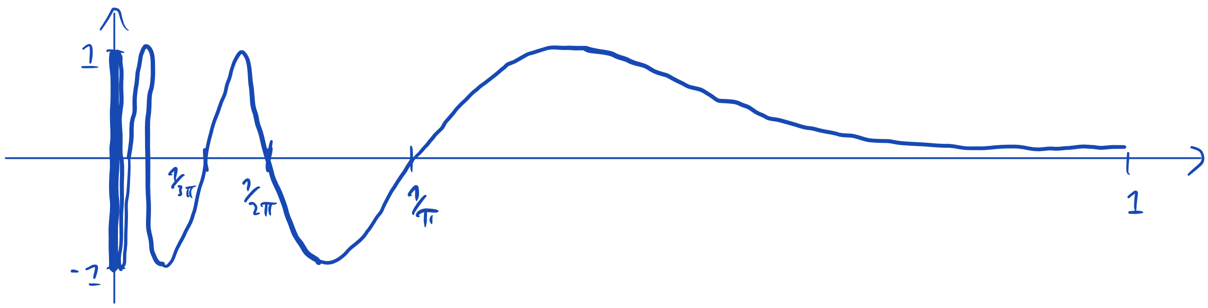
Satz I.4.5 X wegzshgd. $\Rightarrow$ X zshgd.

Bew. Sei X wegzshgd. Ist X nicht zshgd., gilt $X = A \cup B$ mit $A, B \subseteq X$ offen, $A, B \neq \emptyset$ und $A \cap B = \emptyset$. Wähle $a \in A$, $b \in B$. Dann gibt es $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Dann ist $\gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ eine disjunkte Zerlegung von $[0,1]$ in offene nicht-leere Mengen im Widerspruch zum vorherigen Satz. $\square$

Bemerkung: Die Umkehrung ist i. A. falsch:

Sei $\overline{S} = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in (0,1] \right\} \cup \left\{ (0,y) : y \in [-1,1] \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

die abgeschlossene topologische Sinuskurve:



Lemma I.4.6 Sei X ein top. Raum, $A \subseteq X$ zshgd (in der Teilraumtop.). Dann ist $\overline{A}$ zshgd.

Bew.: Ang. $\overline{A} = U \cup V$ mit $U, V \subseteq \overline{A}$ offen, $U \cap V = \emptyset$. Z.z.: $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. Es gibt $U_0, V_0 \subseteq X$ offen mit $U_0 \cap \overline{A} = U$, $V_0 \cap \overline{A} = V$. Also ist $(A \cap U_0) \cup (A \cap V_0)$ eine disjunkte offene Zerlegung von A. Weil A zshgd., folgt o.B.d.A. $A \cap U_0 = \emptyset$. Da $V \subseteq \overline{A}$ abg., gibt es $V_1 \subseteq X$ abg. mit $V = V_1 \cap \overline{A}$.
Aber $A = A \cap V_0 \subseteq \overline{A} \cap V_0 = V = V_1 \cap \overline{A} \subseteq V_1$.
Weil V_1 abg., folgt $\overline{A} \subseteq V_1$. Damit $V = V_1 \cap \overline{A} = \overline{A}$, also $U = \emptyset$. $\square$

__Lemma I.4.7__ Sei $f: X \to Y$ stetig, X (weg-)zshgd. Dann ist $f(X) \subseteq Y$ (weg-)zshgd.

__Bew.__: Sei $f(X) = (U \cap f(X)) \cup (V \cap f(X))$ eine disjunkte Zerlegung mit $U, V \subseteq Y$ offen. Dann ist $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ disj. offene Zerl. von X, also o.B.d.A. $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow U \cap f(X) = \emptyset$.

Seien $x, y \in f(X)$. Wähle $x', y' \in X$ mit $f(x') = x$, $f(y') = y$. Wähle $\gamma: [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x'$, $\gamma(1) = y'$. Dann verbindet $f \circ \gamma$ den Punkt x mit dem Punkt y. $\square$

- Für $f: (0,1] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ gilt $\overline{S} = \overline{f((0,1])}$, also ist $\overline{S}$ zshgd.
- Angenommen, es gäbe $\gamma: [0,1] \to \overline{S}$ stetig mit $\gamma(0) = (0,1)$ und $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Setze
$$s := \sup \left\{ t \in [0,1] : \gamma(t) \in \{0\} \times [-1,1] \right\}.$$
Weil γ stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit
$\gamma([s, s+\delta]) \subseteq B_{1/2}(\gamma(s))$ (*). Seien $pr_{x/y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Proj. auf die x/y-Achse. Dann ist $pr_x \circ \gamma([s, s+\delta])$ zshgd, also ein Intervall I und $[0, x] \subseteq I$ mit $x := pr_x(\gamma(s+\delta)) > 0$. Daraus folgt jedoch $pr_y \circ \gamma([s, s+\delta]) = [-1, 1]$ im Widerspruch zu (*).

Also ist $\bar{S}$ nicht wegzshgd. Insbesondere müssen Abschlüsse wegzshgder Mengen nicht wegzshgd. sein.

Prop. I.4.8 Sei $\{A_i\}_{i\in I}$ eine Familie (weg-) zshgder Teilräume eines top. Raums X mit $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ (weg-) zshgd.

Bew. Wähle $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Betrachte $\bigcup_{i\in I} A_i = U \cup V$. O.B.d.A $x \in U$. Sei $y \in V$ und $y \in A_{i_0}$. Erhalte $A_{i_0} = (A_{i_0} \cap U) \cup (A_{i_0} \cap V)$. Für wegzshgd. klar. $\square$

Def. I.4.9 Sei X top. Raum, $x \in X$. Dann heißt die Vereinigung aller (weg-) zshgder Teilräume, die x enthalten, die (Weg-) Zusammenhangs-komponente von x.

Notiz. Jeder Raum ist disjunkte Vereinigung seiner (Weg-) Zusammenhangskomponenten.

Der Raum $\bar{S}$ hat eine Zshgskomp. und zwei Wegzshgskomp.en.

I.5 Das Hausdorff-Axiom.

Def. I.5.1 Ein top. Raum X heißt Hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte in X disjunkte Umgebungen haben.

Bspe. · Jeder metrische Raum (X,d) ist Hausdorffsch, denn falls $x,y \in X$, $x \neq y$, gilt $d(x,y) := r > 0$ und $B_{r/2}(x) \cap B_{r/2}(y) = \emptyset$.

· Jeder diskrete Raum ist Hausdorffsch.

Gegenbspe. · Gilt $|X| \geq 2$, so ist $(X, \mathcal{O}_{\text{trivial}})$ nicht Hausdorffsch.

· Sei k ein Körper, dann hat die Zariski-Topologie auf k^n die abgeschlossenen Mengen

$$\left\{ \{ x \in k^n : p(x) = 0 \text{ für alle } p \in S \} : S \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

$\rightsquigarrow$ Algebraische Geometrie

Notiz. · In einem Hausdorffraum sind Grenzwerte konvergenter Folgen eindeutig, denn Umgebungen zweier Grenzwerte enthalten fast alle Folgenglieder, sind also nicht disjunkt.

· Ist X Hausdorffsch, so auch jeder Teilraum $A \subseteq X$

· Seien $X, Y \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

1.) X, Y Hausdorffsch 2.) $X \sqcup Y$ Hausdorffsch

3.) $X \times Y$ Hausdorffsch

I.6 Kompaktheit

Def. I.6.1 Ein top. Raum heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. (Gilt $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit U_i offen, gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.)

Bspe.
- $(0,1]$, $[0,\infty)$ sind nicht kompakt
  $\bigcup_{n \geq 1} (1/n, 1] = (0,1]$, $\bigcup_{n \geq 1} [0, n) = [0, \infty)$
- Sei X diskret. Dann gilt X komp. $\Leftrightarrow |X| < \infty$.
- $(X, \mathcal{O}_{trivial})$ ist kompakt
- Das Einheitsintervall $[0,1]$ ist kompakt.

Bew.: Sei $[0,1] = \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann behaupten wir, es gibt $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall $I \subseteq [0,1]$ der Länge δ in einer Menge U_i liegt. Falls nicht, sei x_n Mittelpunkt eines Teilintervalls mit Länge $1/n$, das in keiner Menge U_i liegt. Bolzano-Weierstraß: $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$. Aber $x \in U_{i_0} \subseteq [0,1]$ offen, Widerspruch. Wähle nun endliche Überdeckung von $[0,1]$ durch $\delta/2$-Bälle. Erhalte $[0,1] = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$. $\square$

Kompaktheit erlaubt oftmals eine globale Eigenschaft aus der zugehörigen lokalen Eigenschaft zu schließen:

Lemma I.6.2 Sei $f: (X, \mathcal{O}) \to (Y, d)$ stetig, X kompakt. Dann ist $f(X)$ beschränkt.

Bew. Zu $x \in X$ gibt es offene Umg. U_x mit $f(U_x) \subseteq B_1(f(x))$. Da $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$ für gewisse $x_1, \dots, x_n$, gilt $f(X) \subseteq B_1(f(x_1)) \cup \dots \cup B_1(f(x_n))$. $\square$

Satz I.6.3 Sei X ein top. Raum.

(i) Ist X komp. und $A \subseteq X$ abg., dann ist A kompakt.

(ii) Ist X Hausdorffsch und $A \subseteq X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen.

Bew. (i) Sei $A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A)$ mit $U_i \subseteq X$ offen. Dann ist $X = X \setminus A \cup \bigcup_{i \in I} U_i$ offene Überdeckung von X.

(ii) Sei $A \subsetneq X$ kompakt. Wähle $x \in X \setminus A$. Zu $y \in A$, seien U_y und V_y Umgebungen von x und y mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Betrachte $A = \bigcup_{y \in A} (V_y \cap A)$. Weil A kompakt, gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$ mit $A \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Setze $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ und $V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Dann gilt $U \cap V = \emptyset$, insbesondere $U \cap A = \emptyset$. Also ist x ein innerer Punkt von $X \setminus A$. Weil $x \in X \setminus A$ beliebig war ist $X \setminus A$ offen, also A abgeschlossen. $\square$

Satz I.6.4 Sei $f: X \to Y$ stetig.

(i) Ist X kompakt, so auch $f(X)$.

(ii) Ist f bijektiv, X kompakt und Y Hausdorffsch, dann ist f ein Homöomorphismus.

Bew. (i) Sei $f(X) = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap f(X))$. Dann ist $X = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n}) = f^{-1}(U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n})$, also $f(X) = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

(ii) Sei f bijektiv. Dann gilt:
f^{-1} stetig $\Leftrightarrow$ ($A \subseteq X$ abg. $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ abg.)
Sei also $A \subseteq X$ abg. Weil X kompakt, ist A kompakt, also ist $f(A)$ kompakt. Weil Y Hausdorffsch, ist $f(A)$ abgeschlossen. $\square$

Notiz. Seien $X, Y \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:
1.) X, Y kompakt 2.) $X \sqcup Y$ kompakt 3.) $X \times Y$ kompakt.

Bew. 1.) $\Leftrightarrow$ 2.): klar 3.) $\Rightarrow$ 1.) Wende letzten Satz auf $pr_X : X \times Y \to X$ und $pr_Y : X \times Y \to Y$ an.
1.) $\Rightarrow$ 3.): Sei $X \times Y = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zu $(x,y) \in X \times Y$ gibt es $i(x,y) \in I$, $V(x,y) \subseteq X$ offen, $W(x,y) \subseteq Y$ offen mit $(x,y) \in V(x,y) \times W(x,y) \subseteq U_{i(x,y)}$.
Fixiere x. Dann ist $Y = \bigcup_{y \in Y} W(x,y) = W(x, y_1(x)) \cup \dots \cup W(x, y_{n_x}(x))$.
Setze $V_x := V(x, y_1(x)) \cap \dots \cap V(x, y_{n_x}(x))$.
Dann gilt $X = \bigcup_{x\in X} V_x = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$ und
$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} V_{x_i} \times W(x_i, y_j(x_i))$. $\square$

Bemerkung. Es gilt auch für eine unendliche Familie $\{X_i\}$ kompakter Räume, dass $\prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist (Satz von Tychonoff).

Satz I.6.5 (Heine-Borel) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:
(i) K ist kompakt (ii) K ist beschränkt und abg.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): Satz I.6.3(ii) und Lemma mit $f = \|\cdot\|$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Für $r \gg 0$ gilt $K \subseteq [-r, r]^n$. Nach Bsp., Notiz und Satz I.6.3(i) ist K kompakt. $\square$

I.7 Die Quotiententopologie

Sei „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf dem top. Raum X. Dann wollen wir die Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen mit einer Topologie versehen, sodass folgende universelle Eigenschaft gilt:
Ist $f: X \to Y$ stetig mit $f(x_1) = f(x_2)$ falls $x_1 \sim x_2$, dann

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(Alle Abb. stetig).

Dann muss $X/\sim$ die feinste Topologie tragen, für die $p: X \to X/\sim$ noch stetig ist, d.h.

$$U \subseteq X/\sim \text{ offen} \iff p^{-1}(U) \subseteq X \text{ offen},$$

denn

- p soll stetig sein (also nicht feiner)
- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & X/_\sim \\ X/_\sim \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$ (also nicht gröber) .

<u>Beobachtung</u>. Sei $f: X \to Y$ surjektiv. Dann definiert $x_1 \sim x_2 \;:\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$ eine Äquivalenzrel. auf X, für die $\bar{f}$ eine stetige Bijektion ist und $\bar{f}$ ist genau dann ein Homöo., wenn Y die Quot.top. trägt:

<u>Satz I.7.1</u> Für $f: X \to Y$ surjektiv sind äquivalent:

(i) $\bar{f}: X/_\sim \xrightarrow{\cong} Y$.

(ii) Für jede Abb. $g: Y \to Z$ (von Mengen) ist $g \circ f$ genau dann stetig, wenn g stetig ist.

(iii) $U \subseteq Y$ offen $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen.

(iv) $A \subseteq Y$ abg. $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A) \subseteq X$ abg.

<u>Def I.7.2</u> Erfüllt ein surjektives $f: X \to Y$ eine (dann jede) dieser Eigenschaften, heißt sie Identifizierung oder Quotientenabbildung.

<u>Bew</u>. (iii) $\Leftrightarrow$ (iv): klar. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $g: Y \to Z$ eine Abb. von Mengen. Ist g stetig, so auch $g \circ f = g \circ \bar{f} \circ p$. Ist $g \circ f$ stetig, dann auch $g \circ \bar{f}$ nach der univ. Eigenschaft. Also ist $g = (g \circ \bar{f}) \circ \bar{f}^{-1}$ stetig.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wegen (iii) ist f stetig, also $\bar{f}$ stetige Bijektion nach universeller Eigenschaft. Sei $U \subseteq X/\sim$ offen. Dann ist $V = p^{-1}(U) \subseteq X$ offen und $f^{-1}(f(V)) = V$, also ist $\bar{f}(U) = f(V) \subseteq Y$ offen laut (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Betrachte $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y')$, wobei $\mathcal{O}_Y'$ durch (iii) definiert ist. Weil wir schon (iii) $\Rightarrow$ (i) und (i) $\Rightarrow$ (ii) wissen, gilt (ii) auch für $(Y, \mathcal{O}_Y')$. Anwenden von (ii) für $g = id_{(Y, \mathcal{O}_Y)}$ und $g = id_{(Y, \mathcal{O}_Y')}$ zeigt f ist mit beiden Topologien stetig. Also ist auch $id_Y \circ f = f$ stetig für $id_Y : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Y, \mathcal{O}_Y')$ und $id_Y : (Y, \mathcal{O}_Y') \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. Nach (ii) sind also beide Identitäten stetig, d.h. $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y'$. $\square$

<u>Notiz.</u> Injektive Identifizierungen sind Homöomorphismen.

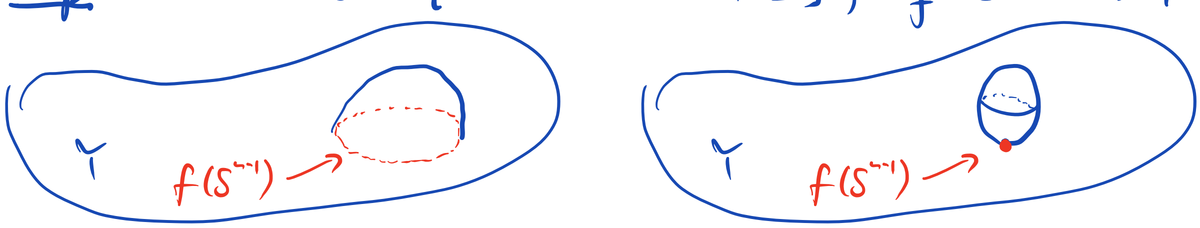
<u>Beispiele</u> 1.) Verkleben von Räumen:

Für $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ stetig sei „$\sim$" die feinste Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$, für die $a \sim f(a)$ für alle $a \in A$ gilt. Dann heißt

$$X \sqcup_f Y := X \sqcup Y /_\sim$$

die Anheftung von X an Y mit Anheftungsabb. f

<u>Bsp.</u>: $S^{n-1} \subseteq D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $f : S^{n-1} \to Y$



„Anheften einer n-Zelle" □

<u>Lemma I.7.3</u> Wir haben eine kanonische Inklusion $Y \subseteq X \sqcup_f Y$ (aber i. A. nicht $X \subseteq X \sqcup_f Y$).

<u>Beweis.</u> Injektiv ✓ stetig ✓. Sei $U \subseteq Y$ offen.
z.z.: $p(U) \subseteq p(Y)$ offen. Es ist $f^{-1}(U) \subseteq A$ offen, also gibt es $V \subseteq X$ offen mit $f^{-1}(U) = V \cap A$. Somit folgt $p^{-1}(p(V \sqcup U)) = V \sqcup U \subseteq X \sqcup Y$ offen, also ist $p(V \sqcup U) \subseteq X \sqcup_f Y$ offen und $p(U) = p(V \sqcup U) \cap p(Y)$. □

2.) Kollabieren eines Teilraums zu einem Punkt.

Dies ist der Spezialfall einer Anheftung mit $Y = \bullet$.
Notation: $X/A := X \sqcup_f \bullet$ mit $f: A \to \bullet$.

<u>Bsp.</u> Wir behaupten $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$ ($\text{—} \rightsquigarrow \bigcirc$)

<u>Bew.</u>
$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \sqcup \bullet} \arrow[r, "f", "{\substack{\bullet \mapsto 1 \\ t \mapsto e^{2\pi i t}}}"'] \arrow[d, "p"'] & S^1 \\
{[0,1]/\{0,1\}} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\bar{f}$ ist stetige Bijektion.
- $[0,1]/\{0,1\} = p([0,1] \sqcup \bullet)$ ist komp.
- $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist Hausdorffsch. □

So ähnlich $D^n / S^{n-1} \cong S^n$.

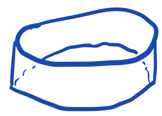
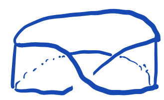
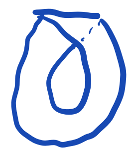
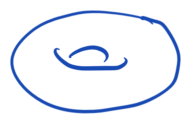
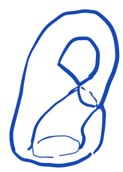
Beachte: · Für $x_0 \in X$ gilt $X/\{x_0\} \cong X$,
· $X/\emptyset \cong X \sqcup \bullet$, insbes. $\emptyset/\emptyset = \bullet$.

3.) Abbildungstori und Selbstverklebungen

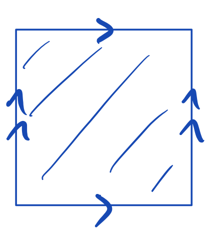
Sei $f: X \xrightarrow{\cong} X$ ein Homöomorphismus. Dann heißt

$$T_f := X \times [0,1] /_{(x,1)\sim(f(x),0)}$$

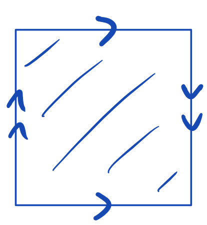
der Abbildungstorus von f. Bspe:

- $f = \mathrm{id}_{[-1,1]}$, $T_f =$  „Zylinder"
- $f = -\mathrm{id}_{[-1,1]}$, $T_f =$  $=$  „Möbiusband"
- $f = \mathrm{id}_{S^1}$, $T_f =$  „Torus"
- $f: S^1 \to S^1$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$, $T_f =$  „Kleinsche Flasche"

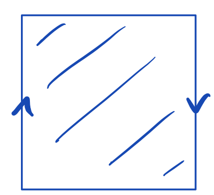
Selbstverklebungen gibt man meist schematisch an:



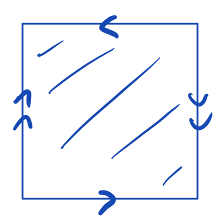
Torus



Kleinsche Flasche



Möbiusband



$D^2/_{S^1 \ni x \sim -x \in S^1}$

$\cong S^2/_{x\sim -x} \cong \mathbb{RP}^2$

(Boysche Fläche)

4.) Orbiträume von Gruppenwirkungen

<u>Def. I.7.4</u> Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G, sodass G zugleich ein top. Raum ist und
$G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, sowie
$G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

<u>Bem.</u> Meist fordert man zusätzlich Hausdorffsch.

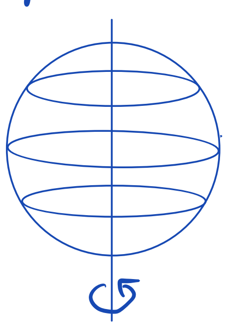
<u>Def I.7.5</u> Eine Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$ einer top. Gruppe G auf einen top. Raum X heißt stetig, wenn
$G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$ stetig ist.

Zu $x \in X$ heißt $Gx = \{gx : g \in G\}$ die **Bahn** oder der **Orbit** von x. „Im selben Orbit liegen" definiert eine Äquivalenzrelation „$\sim$" auf X und

$$X/G := X/\sim$$

heißt der **Orbitraum** von $G \curvearrowright X$.

<u>Bsp.</u>: $SO(2) \curvearrowright S^2$ durch Drehung um x_3-Achse:



$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "pr_3"] \arrow[d] & {[-1, 1]} \\ S^2/SO(2) \arrow[ur, dashed, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Zu $x \in X$ heißt $G_x = \{ g \in G : gx = x \}$ die Standgruppe von x.

<u>Lemma I.7.6</u> Sei G komp., X Hausd., $G/G_x \xrightarrow{\cong} Gx$, $gG_x \longmapsto gx$

<u>Bew.</u> Wohldefiniert: ✓ Surjektiv: ✓ Injektiv:
$gx = hx \Rightarrow h^{-1}gx = x \Rightarrow h^{-1}g \in G_x \Rightarrow gG_x = hG_x$.
Stetig: Betrachte $G \to G/G_x \to G_x$, $g \mapsto gx$, wende obigen Satz wo. (ii) an. Nun ist G/G_x komp. und $Gx \subseteq X$ Hausdorffsch. $\Rightarrow$ folgt $G/G_x \cong Gx$. $\square$

<u>Warnung 1.</u> Kompaktheit und (Weg-) Zusammenhang vererbt sich auf den Quotienten, die Hausdorff-Eigenschaft i. A. nicht.

<u>Warnung 2.</u> Eine Quot.abb. muss weder offen noch abgeschlossen sein. Bsp.: $f: [0,3) \to S^1$, $t \mapsto \exp(\pi i t)$ ist Quot.abb. Aber $f([0,1)) = f([2,3)) \subseteq S^1$ ist weder offen noch abgeschlossen.

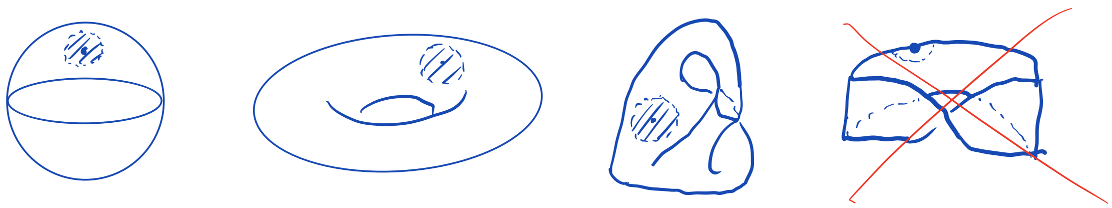
II Mannigfaltigkeiten und Flächen

II.1 Mannigfaltigkeiten

Def. II.1.1 Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein zweitabzählbarer Hausdorffraum M, der lokal euklidisch ist: jedes $p \in M$ hat eine Umgebung $U_p \subseteq M$ mit $U_p \cong \mathbb{R}^n$.

Bem. 1.) Es gilt $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$,

$$x \longmapsto \frac{x}{1-\|x\|}.$$



2.) Ein Homöomorphismus $\varphi : U_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ heißt Karte um p. Eine weitere Karte $\psi : V_q \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ wechselt glatt mit φ, falls

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U_p \cap V_q)} : \varphi(U_p \cap V_q) \longrightarrow \psi(U_p \cap V_q)$$

ein Diffeomorphismus ist, d.h. glatt (C^∞) mit glatter Umkehrabbildung. Ein Atlas ist eine Menge von Karten, die M überdecken. Eine glatte Struktur auf M ist ein maximaler Atlas aus glatt wechselnden Karten.

$\rightsquigarrow$ Differentialtopologie

Satz (Kervaire-Milnor) Es gibt 28 wesentlich verschiedene glatte Strukturen auf S^7.

Eine glatte Struktur erlaubt Def. des Tangentialbündels, auf dem man geometrische Strukturen studiert (Riemannsche Metriken, symplektische Formen, ...) $\rightsquigarrow$ Differentialgeometrie.

Bspe: 1.) Jeder diskrete höchstens abzählbare Raum ist 0-dim. Mannigfaltigkeit

2.) $\mathbb{R}$ und S^1 sind 1-dim. Mfken.

3.) M: m-dim. Mfk., N: n-dim. Mfk.

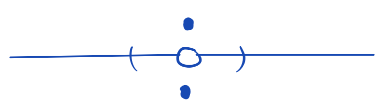
Dann ist $M \times N$ eine $(m+n)$-dim Mfk.

($S^1 \times S^1 =$ )

4.) Sind M und N n-dim. Mfk.en, ist $M \sqcup N$ eine n-dim. Mfk.

Gegenbeispiele: 1.) $\overline{S}$ ist nicht lokal euklidisch.

2.) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{diskret})$ ist lokal eukl. und Hausd., aber nicht zweitabzählbar.

3.) $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \underset{\text{für } x \neq 0}{i_1(x) \sim i_2(x)}$ ist lokal eukl. und zweitabzb., aber nicht Hausdorffsch 

Satz II.1.2 $\mathbb{R}P^n$ ist eine n-dim. Mfk.

Bew. Zweitabzählbar: $p: S^n \to \mathbb{RP}^n$ ist offen, denn für $U \subseteq S^n$ offen ist $p^{-1}(p(U)) = U \cup -U$ offen. Stetige, offene, surjektive Abb. $f: X \to Y$ bilden Basen auf Basen ab: Sei $\mathcal{B}$ Basis von X, $U \subseteq Y$ offen. Schreibe $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}} V$. Dann ist $U = f(f^{-1}(U)) = \bigcup_{V} f(V)$.

Hausdorff: Seien $[x], [y] \in \mathbb{RP}^n$, $[x] \neq [y]$. Dann existieren disjunkte offene Umgen $U, V \subseteq S^n$ von x, y, sodass $\pm U, \pm V$ disjunkt, also sind $p(U)$, $p(V)$ disjunkte Umgebungen von $[x], [y]$.

Lokal euklidisch: Sei $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n$. Dann gibt es ein i mit $x_i \neq 0$ und $U = \{(y_0 : \dots : y_n) : y_i \neq 0\}$ ist offene Umg. von x.

Beh.: $\varphi: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, $(y_0 : \dots : y_n) \mapsto \left(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \widehat{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right)$.

Bew.: wohldefiniert ✓ Weil $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ offen ist, trägt U die Quotiententopologie von $p|_{p^{-1}(U)}$.

Definieren wir $\varphi': p^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$, $(y_0, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \widehat{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right)$, gilt $\varphi \circ p|_{p^{-1}(U)} = \varphi'$. Weil φ' stetig ist, ist φ nach Satz I.7 stetig. ▫ Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \to U$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n)$ ist als Komposition $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = 1\} \longrightarrow \{x \in S^n : x_i > 0\} \xrightarrow{p} U$ ebenfalls stetig. □

Satz II.1.3 Jede zusammenhängende 1-dim. Mf. ist entweder homöomorph zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1.

Bew.: [D. Gale, The classification of 1-manifolds] □

II.2 Flächen

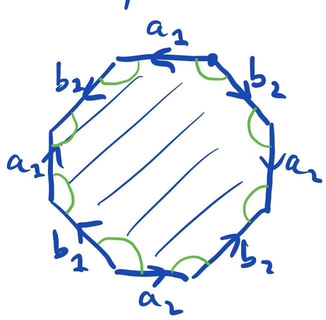
Def. II.2.1 Eine 2-dim. Mf. nennen wir auch Fläche.

Konstruktion von Flächen: Betrachte ein Wort, z.B.

$w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$

- aus einem Alphabet aus n Buchstaben,
- sodass jeder Buchstabe genau zweimal vorkommt,
- mit beliebiger Wahl des Exponenten ± 1.

Beschrifte rundherum ein $2n$-Eck mit diesem Wort.



Fakt I: Die zugehörige Selbstverklebung ist eine zusammenhängende kompakte Fläche.

Fakt II: Zu jeder zusammenhängenden kompakten Fläche F gibt es ein Wort w wie oben mit $F \cong F_w$.

(Wähle Triangulierung, zähle Dreiecke benachbart auf, verklebe immer nur eine Kante, erhalte $2n$-Eck)

Satz II.2.2 (Klassifikation von Flächen) Die Flächen F_w folgender Wörter w bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Homöomorphieklassen zusammenhängender kompakter Flächen:

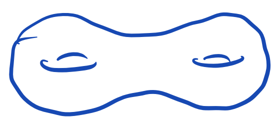
1.) aa^{-1},

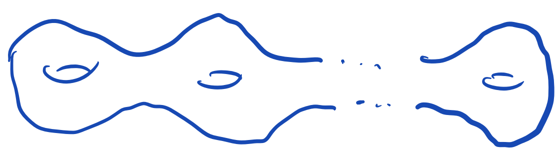
2.) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ $\quad (g \geq 1)$,

3.) $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$ $\quad (g \geq 1)$.

Bilder:

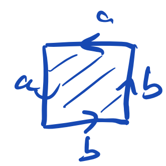
1.)   $= S^2$

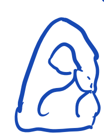
2.) $g=1$: , $g=2$: ,

 g Löcher, $= T^2 \# \cdots \# T^2$, $T^2 = S^1 \times S^1$

$M \# N$ = verbundene Summe = entferne offene n-Bälle von M und N, verklebe Ränder.

Orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Notation: Σ_g.

3.) $g=1$:  $\mathbb{RP}^2$ $\quad g=2$: 



$\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$ $\quad g$ Kopien,

Nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht g

Notation: N_g.

__Bem.__ Wir nennen zwei Wörter w und w' äquivalent ($w \sim w'$), falls $F_w \cong F_{w'}$. Folgende Operationen liefern äquivalente Wörter:

1.) Zyklische Vertauschung, z.B. $a^2bca \sim a^3bc$,

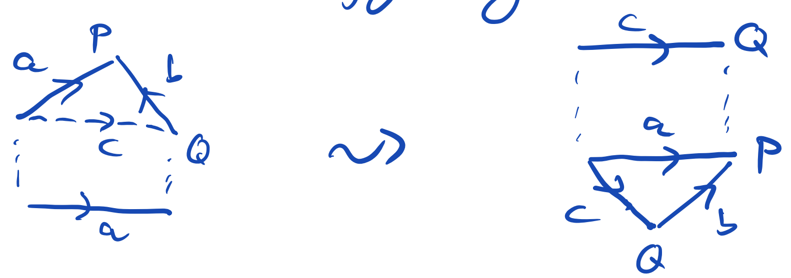
2.) Invertieren: $abc \sim c^{-1}b^{-1}a^{-1}$,

3.) Einen festen Buchstaben überall invertieren, z.B. $ab^{-2}cbab^{-1} \sim ab^2cb^{-1}ab$

4.) Löschen (echter) Teilwörter der Form aa^{-1}, z.B. $baa^{-1}b \sim b^2$

__Beh.:__ Jedes Wort w kann durch ein äquivalentes Wort w' ersetzt werden kann, bei dem alle Eckpunkte identifiziert werden.

__Bew.:__ Sei w ohne Teilwort der Form „aa^{-1}" gegeben. Seien P, Q benachbarte Ecken aus verschiedenen Identifizierungsklassen:

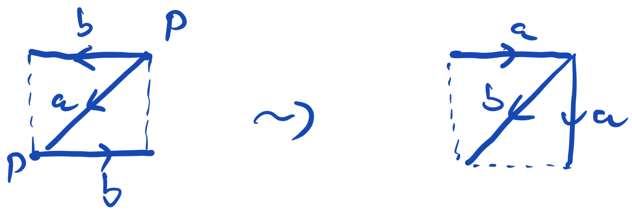


$\rightsquigarrow$ Q-Klasse um einen Punkt größer

P- " " " " kleiner. $\square$

Wir können also annehmen, w sei reduziert (keine „aa^{-1}"-Teilwörter, alle Ecken identifiziert)

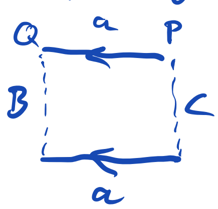
Mache Seitenpaare vom Typ I $(\dots a \dots a \dots)$ benachbart:



(bleibt reduziert)

Beh. Hat w mind. vier Buchstaben und ein Typ II-Seitenpaar $(\dots a \dots a^{-1} \dots)$, dann hat w die Form
$\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \dots$.

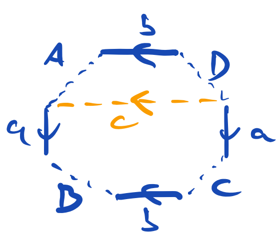
Bew.: Gäbe es nur ein Typ II-Seitenpaar,



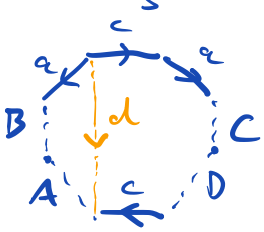
, wäre keine Kante in B mit einer Kante in C identifiziert, weil Typ I-Seitenpaare benachbart sind. Weil w reduziert ist, sind B und C nicht leer, also $P \neq Q$, Widerspruch. Genauso schließt man aus, dass alle Typ II-Seitenpaare unverschachtelt sind. $\square$

Beh.: $\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \sim \dots b a b^{-1} a^{-1} \dots$

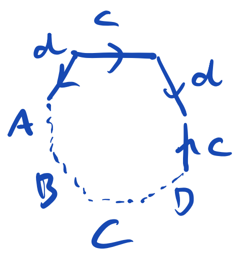
Bew.:



Falls A, B, C, D leer, fertig!
O.B.d.A. $A \neq \emptyset$. Zerschneide an c, verklebe an b.



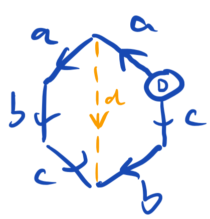
Falls CD leer, fertig!
Sonst: Zerschneide an d, verklebe an a



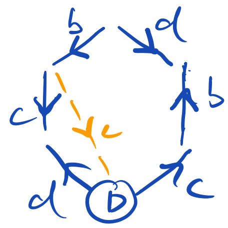
Ersetze „d" mit „b^{-1}" und „c" mit „a" (bleibt reduziert). □

<u>Beh.</u>: $aabcb^{-1}c^{-1}D \sim aabbccD$.

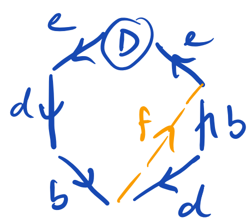
<u>Bew.</u>:



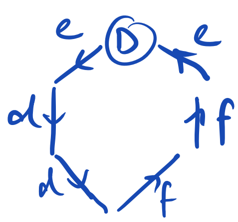
Zerschneide an d, verklebe an a.



Zerschneide an e, verklebe an c.



Zerschneide an f, verklebe an b.



Vertausche zyklisch und benenne d, e, f um in a, b, c. □

Indem man Kommutatoren durch zyklische Vertauschung nach einem „a"-Wort anordnet, erhält man so nach und nach eine der Standardformen. Diese Flächen sind alle verschieden → Fundamentalgruppe, siehe Abschnitt VI.3. □

III Homotopie und Fundamentalgruppe

III.1 Homotopie, Homotopieäquivalenz, Deformationsretrakte

Setze $I := [0,1]$.

Def. III.1.1 Seien X, Y top. Räume. Dann heißen stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ homotop, falls es eine stetige Abbildung

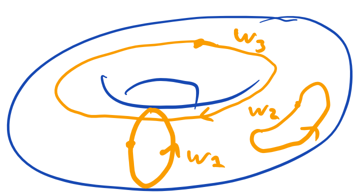
$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

gibt mit $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

- Die Abbildung H heißt Homotopie von f nach g. (Notation: $f \simeq_H g$ oder nur $f \simeq g$.)
- Für $t \in I$, sei $H_t : X \to Y$, $x \mapsto H(t,x)$.
- Man kann sich H als „Film" vorstellen, der f kontinuierlich in g überführt.

Bsp. (Homotopien von Wegen/Pfaden)

- Sei $X = S^1$, $Y = \mathbb{T}^2$. Dann sind $w_1, w_2, w_3 : X \to Y$ nicht homotop. (Beweis später)



- Je zwei Abb. $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sind homotop, denn $f \simeq_H (X \to \mathbb{R}, x \mapsto 0)$ mit $H(x,t) = (1-t)\cdot f(x)$, genauso für g, und es gilt

Lemma III.1.2 "$\simeq$" ist eine Äquivalenzrelation auf $C(X,Y) = \{ f: X \to Y : f \text{ stetig}\}$.

Bew. Reflexiv: $f \simeq_H f$ mit $H(x,t) = f(x)$. Symmetrisch: Sei $f \simeq_H g$, dann $g \simeq_{\bar{H}} f$ mit $\bar{H}(x,t) = H(x, 1-t)$.
Transitiv: Sei $f \simeq_H g$ und $g \simeq_{H'} h$. Dann $f \simeq_{H''} h$ mit $H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H'(x,2t-1) & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$. $\square$

Notiz. 1) Seien $f_1, f_2 : Y \to Z$, $g_1, g_2 : X \to Y$, $f_1 \simeq_H f_2$, $g_1 \simeq_{H'} g_2$. Dann gilt $f_1 \circ g_1 \simeq_{H''} f_2 \circ g_2$, wobei $H''_t = H_t \circ H'_t$

2.) Seien $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Z \to W$, $f_1 \simeq_H f_2$, $g_1 \simeq_{H'} g_2$. Dann gilt für $f_1 \times g_1, f_2 \times g_2 : X \times Z \to Y \times W$, dass $f_1 \times g_1 \simeq_{H''} f_2 \times g_2$ mit $H''_t = H_t \times H'_t$.

Def. III.1.3 Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt Homotopieäquivalenz, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \to X$ gibt (das Homotopieinverse), sodass $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$.

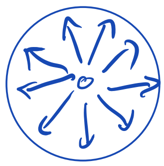
- Gibt es so eine Homotopieäquivalenz $f: X \to Y$, heißen X und Y homotopieäquivalent. (Notation $X \simeq Y$).

- „$X \simeq Y$" ist eine Äquivalenzrelation und aus $X \simeq Y$ und $X' \simeq Y'$ folgt $X \times X' \simeq Y \times Y'$.
- Spezialfall: Ist $f: X \hookrightarrow Y$ die Inklusion eines Teilraums und $g: Y \to X$ eine Retraktion, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (nicht nur $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$), und $f \circ g \simeq_H \mathrm{id}_Y$, dann heißt X ein Deformationsretrakt von Y und H heißt Deformationsretraktion. Gilt zudem $H(x,t) = x$ für $x \in X$ und $t \in I$, heißt X starker Deformationsretrakt und H heißt starke Deformationsretraktion.
- Ein top. Raum X heißt zusammenziehbar, falls ein Punkt in X ein Deformationsretrakt von X ist (insbes. gilt also $X \neq \emptyset$). Äquivalent: $X \simeq \bullet$.

<u>Bspe.</u>: • $\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$ ist starker Deformationsretrakt: $H: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $(x,t) \mapsto t \cdot x$.

- Allgemeiner: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, d.h. es gibt $x_0 \in U$, sodass $\{x_0 + t(x - x_0) : x \in I\} \subseteq U$ für alle $x \in U$, dann ist $\{x_0\} \hookrightarrow U$ starker Def.-retrakt

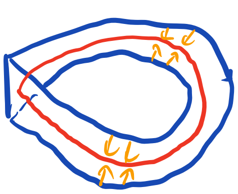
- $S^{n-1} \overset{j}{\hookrightarrow} D^n$ ist noch nicht mal ein Retrakt: Es gibt keine stetige Abbildung $D^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ mit $j \circ r = id_{D^n}$. (Beweis für $n=2$ später, für $n \geq 3$ in Topologie I).
- $S^{n-1} \hookrightarrow D^n \setminus \{0\}$ ist starker Def. retrakt



$$H : D^n \setminus \{0\} \times I \longrightarrow D^n \setminus \{0\}$$
$$(x, t) \longmapsto (1-t) \cdot x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

- Für $S^{n-1} \subseteq D^n \setminus \{0\}$ und $\varphi : S^{n-1} \to Y$ sei $D^n \setminus \{0\} \cup_\varphi Y$ die Anheftung einer n-Zelle „mit Loch". Dann ist $Y \subseteq D^n \setminus \{0\} \cup_\varphi Y$ starker Deformationsretrakt.

- Sei M das Möbiusband. Dann ist die Mittellinie $S^1 \subseteq M$ starker Def. retrakt.



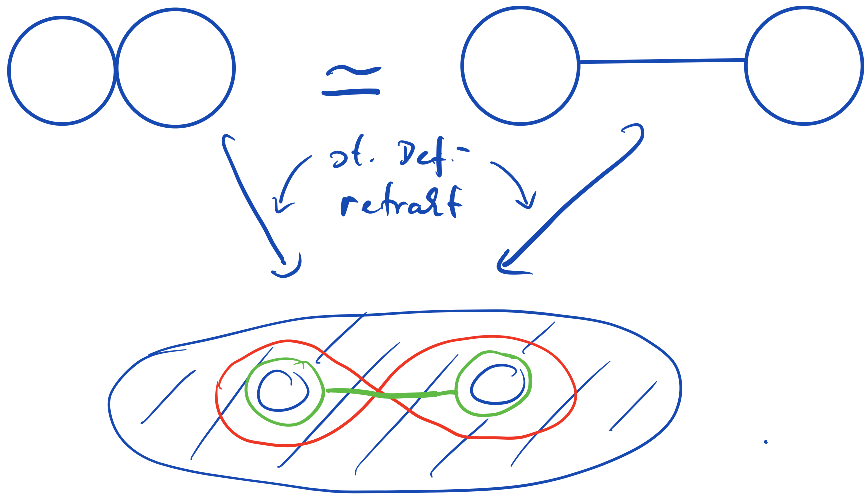
$$M = [-1,1]^2 / (-1,x) \sim (1,-x)$$

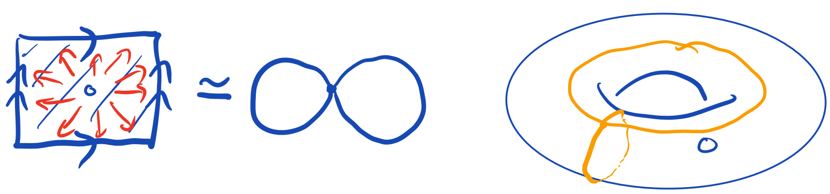
$$j : S^1 = [-1,1] / \{-1,1\} \to M$$
$$[x] \longmapsto [(x,0)]$$

$$r : M \to S^1 = [-1,1] / \{-1,1\}, \quad [(x,y)] \longmapsto [x]$$

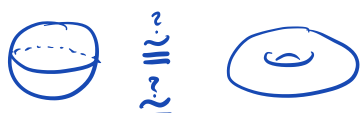
$r \circ j = \mathrm{id}_{S^1}$, $\quad j \circ r \simeq_H \mathrm{id}_M$,

$H_t([(x,y)]) = [(x, t\cdot y)]$.

- 

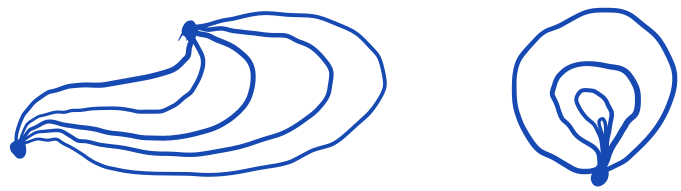
- $T^2 \setminus \{pt\}$ 

III.2 Fundamentalgruppe



Def. III.2.1 Zwei stetige Abbildungen $f, g: X \to Y$ heißen **homotop relativ** $A \subseteq X$, falls es eine Homotopie $f \simeq_H g$ gibt mit $H(a,t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, $t \in I$.
Notation: $f \simeq_A g$. Falls $A = \{x_0\}$, heißt H **punktierte Homotopie**.

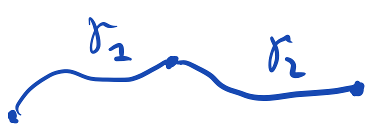
Falls $X = I$, $A = \{0, 1\}$, heißt H Homotopie rel. Endpunkte



- Eine stetige Abbildung $\gamma : I \to X$ nennen wir Weg (oder Pfad). Gilt für zwei Wege $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$, dass $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so heißt

$$\gamma_1 \gamma_2 : I \to X, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \\ & \text{für} \\ \gamma_2(2t-1) & \end{cases} \begin{matrix} t \in [0, 1/2] \\ \\ t \in [1/2, 1] \end{matrix}$$

die Konkatenation von γ_1 und γ_2.



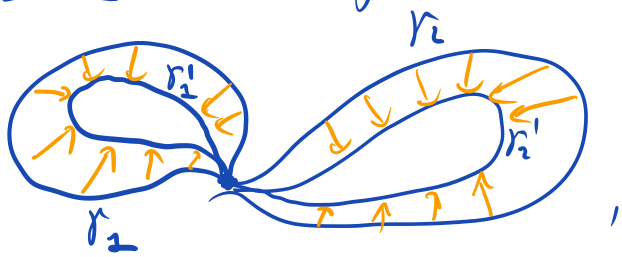
Einen Weg $\gamma : I \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ nennen wir Schleife.

<u>Satz III.2.2</u> Sei X ein top. Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Dann erklärt die Konkatenation eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf der Menge

$$\pi_1(X, x_0) := \{ \gamma : I \to X : \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \} \big/ \simeq_{\{0,1\}}$$

der Homotopieklassen rel. Endpunkte von Schleifen in X mit Start- und Endpunkt x_0. Wir nennen $\pi_1(X, x_0)$ die **Fundamentalgruppe** von X zum Basispunkt x_0.

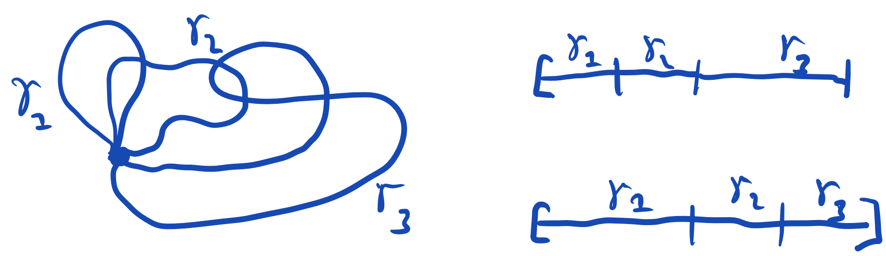
<u>Bem.</u>: · <u>Wohldefiniert.</u> Seien $\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1'$, $\gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2'$



also $\gamma_1 \gamma_2 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1' \gamma_2'$.

Beobachtung: Für jedes $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und jedes $\gamma : I \to X$ gilt $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$ durch $H : I \times I \to X$, $(s,t) \mapsto \gamma((1-t)\cdot s + t \cdot \varphi(s))$ (Reskalierung des Zeitparameters).

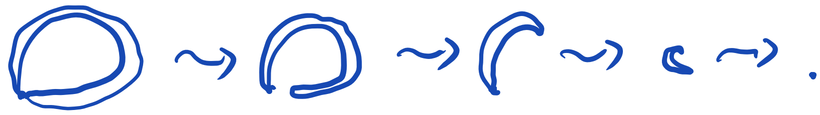
· <u>Assoziativ.</u> Es gilt $(\gamma_1 \gamma_2)\gamma_3 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ durch Reskalieren des Zeitparameters.



· <u>Einselement.</u> Sei $c_{x_0} : I \to X$, $t \mapsto x_0$ der konstante Weg. Dann gilt $c_{x_0}\gamma \simeq_H \gamma \simeq \gamma c_{x_0}$.

· Inverse. Zu $\gamma : I \to X$, sei $\bar{\gamma} : I \to X$, $t \to \gamma(1-t)$.

$$\bar{\gamma}\gamma \simeq c_{x_0} \simeq_H \gamma\bar{\gamma}, \quad H_t(s) = \gamma(t\cdot s)\gamma(t\cdot(1-s)).$$



□

Seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilräume. Dann nennen wir $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$ eine Abbildung von Raumpaaren (Notation: $f : (X, A) \to (Y, B)$.)
Im Spezialfall $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$ notieren wir $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ für eine punktierte Abbildung punktierter Räume.

Prop. III.2.3 Eine stetige Abb. $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\longrightarrow [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Bew. $\pi_1(f)([\alpha][\beta]) = \pi_1(f)([\alpha\beta]) =$
$= [f \circ (\alpha\beta)] = [(f\circ\alpha)(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha][f\circ\beta] =$
$= \pi_1(f)(\alpha)\,\pi_1(f)(\beta)$. □

Prop. III.2.4 Seien $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ stetig. Dann gilt $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Bew. $\pi_1(g\circ f)(\gamma) = [(g\circ f)\circ\gamma] = [g\circ(f\circ\gamma)] =$

$= \pi_1(g)([f \circ \gamma]) = \pi_1(g)(\pi_1(f)([\gamma]))$. $\square$

<u>Prop. III.2.5</u> $\pi_1(id_{(X,x_0)}) = id_{\pi_1(X,x_0)}$.

<u>Bew.</u> $\pi_1(id_{(X,x_0)})([\gamma]) = [id_{(X,x_0)} \circ \gamma] = [\gamma]$. $\square$

<u>Prop. III.2.6</u> Seien $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $f \simeq^H_{\{x_0\}} g$. Dann gilt $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

<u>Bew.</u> Sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Definiere
$H^\gamma : I \times I \to Y$, $(s,t) \mapsto H(\gamma(s), t)$.
Dann gilt $H^\gamma_0 = f \circ \gamma$, $H^\gamma_1 = g \circ \gamma$, $H^\gamma(0,t) =$
$= H^\gamma(1,t) = x_0$ für alle $t \in I$, d.h.
$f \circ \gamma \simeq_{\{0,1\}} g \circ \gamma \iff [f \circ \gamma] = [g \circ \gamma] \iff$
$\iff \pi_1(f)([\gamma]) = \pi_1(g)([\gamma])$. $\square$

<u>Prop. III.2.7</u> Sei $j : A \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt und sei $a \in A$. Dann gilt

$$\pi_1(j) : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$$

<u>Bew.</u> Sei $r : X \to A$ die Retraktion mit $r \circ j = id_A$ und $j \circ r \simeq_A id_X$. Dann gilt $\pi_1(r) \circ \pi_1(j) = id_{\pi_1(A,a)}$ und $\pi_1(j) \circ \pi_1(r) = \pi_1(id_X) = id_{\pi_1(X,x_0)}$. $\square$

<u>Bsp.</u> $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \pi_1(\{0\}, 0) \cong \{1\}$.

<u>Prop. III.2.8</u> Für $f : (X, x_0) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0)$ ist $\pi_1(f)$ ein Iso.

Bew. Hausaufgabe. □

Wir definieren $(X, x_0) \times (Y, y_0) := (X \times Y, (x_0, y_0))$.

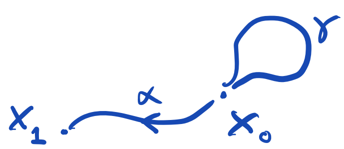
Prop. III.2.9 $\pi_1((X, x_0) \times (Y, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Bew. $(\gamma : I \to X \times Y) \longmapsto (pr_X \circ \gamma,\ pr_Y \circ \gamma)$

$(\gamma : I \to X,\ \gamma' : I \to Y) \longmapsto \left(\begin{array}{l} \gamma \times \gamma' : I \to X \times Y \\ \quad t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t)) \end{array} \right)$ □

Bsp. · Später $\pi_1(S^1, \cdot) \cong \mathbb{Z}$, daher
$\pi_1(T^n, \cdot) \cong \pi_1((S^1, \cdot) \times \dots \times (S^1, \cdot)) \cong \mathbb{Z}^n$.

Prop. III.2.10 Seien $x_0, x_1 \in X$ und $\alpha : I \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$. Dann gilt $\Phi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_1)$,
$[\gamma] \mapsto [\bar{\alpha} \gamma \alpha]$



Bew. Wohldefiniert ✓

Homomorphismus: $\Phi_\alpha([\gamma][\gamma']) = \Phi_\alpha([\gamma\gamma']) =$
$= [\bar{\alpha}\gamma\gamma'\alpha] = [\bar{\alpha}\gamma\alpha\bar{\alpha}\gamma'\alpha] = [\bar{\alpha}\gamma\alpha][\bar{\alpha}\gamma'\alpha] =$
$= \Phi_\alpha([\gamma])\,\Phi_\alpha([\gamma'])$.

Inverses: $[\gamma] \mapsto [\alpha\gamma\bar{\alpha}]$. □

Def. III.2.11 Ein top. Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, falls X nicht leer und wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

Satz III.2.12 Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Lemma III.2.13 (Lebesgue) Sei (X, d) komp. metr. Raum mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass jeder Teilraum $A \subseteq X$ von Durchmesser $< \delta$ in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Bew. Betrachte $X = \bigcup_{x \in X} B_{\varepsilon(x)}(x)$, sd. $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_i$ für irgendein $U_i \in \mathcal{U}$. Erhalte $X = \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$ und setze $\delta := \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n)\}$. Wäre $B \subseteq X$ ein Ball von Radius $< \delta$, der in keinem $B_{2\varepsilon(x_1)}(x_1), \dots, B_{2\varepsilon(x_n)}(x_n)$ enthalten ist, läge der Mittelpunkt von B außerhalb von $\bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon(x_i)}(x_i) = X$, Widerspruch. $\square$

Man spricht von einem Lebesgue-δ für $(X, \mathcal{U})$.

Lemma III.2.14 Sei $n \geq 2$ und $\gamma : (I, \{0,1\}) \to (S^n, x_0)$. Dann gibt es eine nicht-surjektive Abbildung $\gamma' : (I, \{0,1\}) \to (S^n, x_0)$ mit $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$.

Bew. Sei $\mathcal{U}$ die Überdeckung von S^n durch offene Hemisphären. Wähle ein Lebesgue-δ für $(\gamma(I), \mathcal{U}_{|\gamma(I)})$. Weil γ stetig auf einem Kompaktum ist, ist γ gleichmäßig stetig, also gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass $\underbrace{\gamma([\tfrac{k}{m}, \tfrac{k+1}{m}])}_{\text{Durchmesser} < \delta} \subseteq U_k \in \mathcal{U}$ für $k = 0, \dots, m-1$.

Sei $\gamma_\ell : [\frac{\ell}{m}, \frac{\ell+1}{m}] \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Strecke von $\gamma(\frac{\ell}{m})$ nach $\gamma(\frac{\ell+1}{m})$. Definiere $H: I \times I \to S^n$ durch

$$H(s,t) = \frac{(1-t)\gamma(s) + t\gamma_\ell(s)}{\underbrace{\|(1-t)\gamma(s) + t\gamma_\ell(s)\|}_{\neq 0}} \quad \text{für } s \in [\tfrac{\ell}{m}, \tfrac{\ell+1}{m}],$$

$\neq 0$, weil γ und γ_ℓ im selben offenen Halbraum liegen.

Dann ist $\gamma' := H_1$ für $n \geq 2$ nicht surjektiv und $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$. □

<u>Bew.</u> (von Satz III.2.12) Für $[\gamma] \in \pi_1(S^n, x_0)$ sei $\gamma' \simeq_{\{0,1\}} \gamma$ und $y_0 \notin \mathrm{Bild}(\gamma')$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} S^n \setminus \{y_0\} \arrow[rr, "j"] & & S^n \\ & I \arrow[ul, "\gamma''"] \arrow[ur, "\gamma'"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt $[\gamma] = [\gamma'] = [j \circ \gamma''] = \pi_1(j)([\gamma'']) = 1$, denn

$\pi_1(S^n \setminus \{y_0\}, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n, x_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong 1$, also $[\gamma''] = 1$. □

Weil $\pi_1(T^2, \cdot) = \mathbb{Z}^2$, aber $\pi_1(S^2, \cdot) = \{1\}$, gilt also tatsächlich  $\not\simeq$  und erst recht  $\not\cong$ . (Schulden noch $\pi_1(S^1, \cdot) \cong \mathbb{Z}$ → nächstes Kapitel).

IV Überlagerungen

IV.1 Faserbündel und Überlagerungen

Beobachtung: Eine Abbildung $p: X \to Y$ induziert eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{y \in Y} p^{-1}(y)$ von X in die Fasern $p^{-1}(y)$ über $y \in Y$.

(p surjektiv: Jede Faser enthält mind. ein Element.
p injektiv: " " " höchstens " " .)

Def. IV.1.1 Ein Faserbündel besteht aus einer surjektiven stetigen Abbildung $p: E \to B$ (die Bündelprojektion) und einem top. Raum F (die Faser), sodass es zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ von b und einen Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

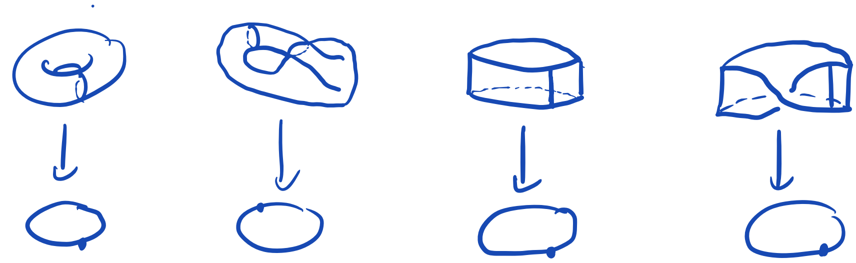
kommutiert

(Lokale Trivialitätsbedingung).

- Ein Faserbündel heißt (global) trivial, falls

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "pr_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

- Bspe:



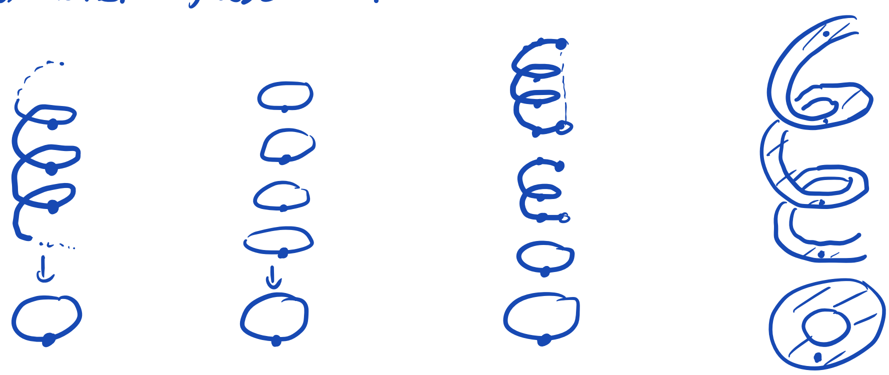
trivial | nicht trivial | trivial | nicht trivial

Der Raum E heißt Totalraum, der Raum B heißt Basisraum des Faserbündels.

<u>Prop. IV.1.2</u> Die Bündelabbildung eines Faserbündels ist eine offene Identifizierung.

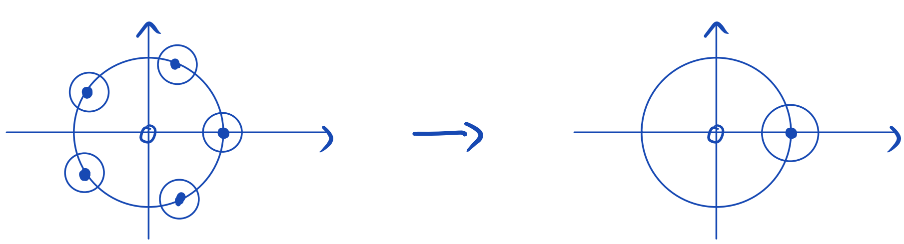
<u>Bew.</u> Hausaufgabe. $\square$

<u>Def. IV.1.3</u> Eine Überlagerung ist ein Faserbündel $p: E \to B$ mit diskreter Faser F.



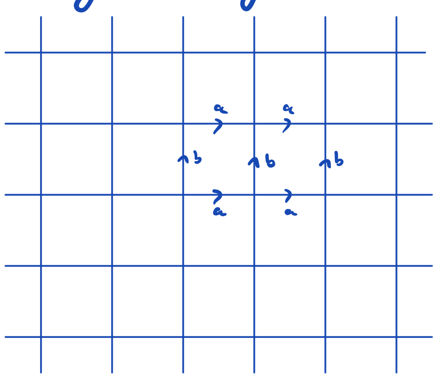
<u>Notiz.</u> Die Zahl $|F| \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ heißt Blätterzahl der Überlagerung.

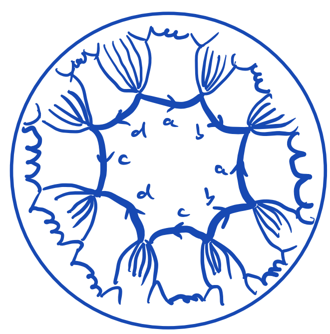
<u>Bsp.</u> · Für $n \in \mathbb{N}$ ist $p: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto z^n$ eine n-blättrige Überlagerung. Für $z = r \cdot \exp(2\pi i \varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $p^{-1}(z) = \{\sqrt[n]{r} \exp(2\pi i \varphi/n), \dots, \sqrt[n]{r} \exp(2\pi i (\frac{n-1+\varphi}{n}))\}$.



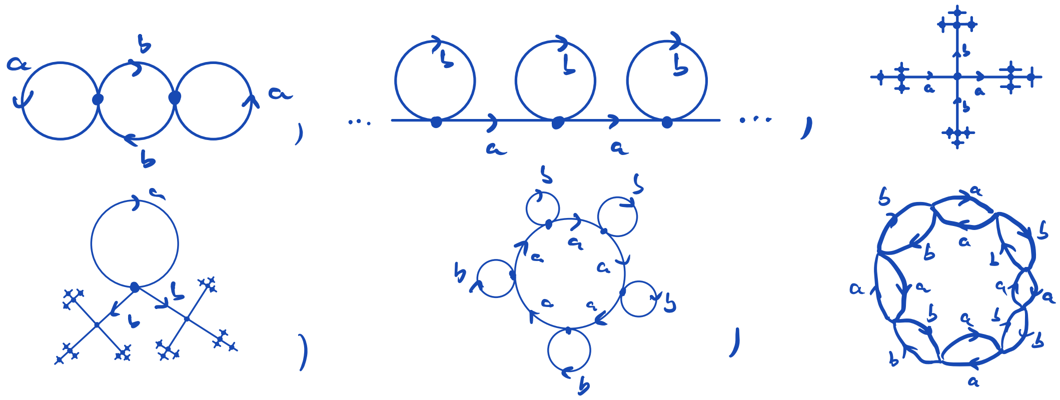
· $p: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ ist n-blättrige Überlagerung.

- $p: \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist ∞-blättrig.
- Endliche Produkte von Überlagerungen sind Überlagerungen, z.B.
  $p: \mathbb{R}^n \to T^n$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp(2\pi i t_1), \dots, \exp(2\pi i t_n))$
- $p: S^n \to \mathbb{RP}^n$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
  Für $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{RP}^n$ sei o.B.d.A. $x_0 \neq 0$.
  Dann ist $U = \{(x_0' : \dots : x_n') : x_0' \neq 0\}$ offene Umgebung von x und
  $$p^{-1}(U) = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_0 < 0\} \cup \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_0 > 0\},$$
  also ist p eine zweiblättrige Überlagerung.
- Für $g \geq 1$ gibt es eine Überlagerung $p: \mathbb{R}^2 \to \Sigma_g$.





- Besonders reichhaltig ist die Überlagerungstheorie von $S^1 \vee S^1 =$  :



IV.2 Hochhebungen

Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung.

Hochhebeproblem (HHP) für Wege:

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (I, 0) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{\gamma}"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Prop. IV.2.1 Zu jedem Weg $\gamma: I \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$ und jedem Punkt $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$ gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma}: I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Bew. Eindeutigkeit Sei $\tilde{\gamma}': I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}'(0) = y_0$ ein weiterer Weg mit $\tilde{\gamma}'(0) = y_0$ und $p \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$.

Dann sind die Mengen

$$\{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \} \text{ und } \{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \}$$

jeweils offen, denn $\gamma(t) \in X$ hat eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ mit

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Also ist lokal die U-Komponente durch die Hochhebebedingung $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ bestimmt, während die F-Komponente konstant bleiben muss, weil F diskret ist. Weil I zshgd. ist und $0 \in \{ t \in I : \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t) \}$, folgt $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}'(t)$ für alle $t \in I$.

__Existenz.__ Sei $t_0 = \sup \left\{ t \in I : \exists \begin{array}{l} \tilde\gamma : [0,t_0] \to Y, \\ \tilde\gamma(0) = y_0,\ p \circ \tilde\gamma = \gamma. \end{array} \right\}$

Es gilt $t_0 \geq 0$. z.z. $t_0 = 1$. Angenommen $t_0 < 1$.
Sei
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\cong"', "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
lokale Trivialisierung um $\gamma(t_0) \in X$.

Dann gibt es $0 < \delta < t_0$ mit $\gamma([t_0-\delta, t_0+\delta]) \subseteq U$.
Sei $\tilde\gamma : [0, t_0-\delta] \to Y$ mit $\tilde\gamma(0) = y_0$. Setze $f := pr_F(\tilde\gamma(t_0))$.
Dann setzt $[t_0-\delta, t_0+\delta] \longrightarrow Y$, $t \longmapsto \varphi^{-1}(\gamma(t), f)$ die Hochhebung $\tilde\gamma$ nach $[0, t_0+\delta]$ fort, Widerspruch. □

HHP für Homotopien:

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\tilde H_0"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \tilde H"] & X \end{tikzcd}$$

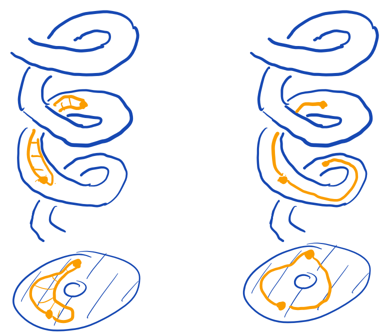
Für $Z = \bullet$ ist dies das Hochhebungsproblem für Wege.
Setze $H^z : I \to X$, $t \mapsto H(z,t)$
und sei $\tilde H^z$ die eindeutige Hochhebung von H^z mit $\tilde H^z(0) = \tilde H_0(z)$.

__Prop. III.2.2__ Die Abbildung $\tilde H : Z \times I \to Y$, $(z,t) \mapsto \tilde H^z(t)$ ist stetig, d.h. das HHP für Homotopien ist eindeutig lösbar.
__Bew.__ Sei $(z_0, t_0) \in Z \times I$ und sei $U \subseteq Y$ eine Umgebung von $y_0 := \tilde H(z_0, t_0)$. Dann gibt es eine lokale Trivialisierung
$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "pr_V"] \\ & V & \end{tikzcd}$$
mit einer Umgebung V von $p(y_0)$ und daher eine möglicherweise kleinere offene Umgebung $W \subseteq U$ von y_0 mit $p|_W : W \xrightarrow{\cong} p(W) \subseteq V$.
Dann ist $U' := H^{-1}(p(W))$ offene Umgebung von (z_0,t_0) und $p(\tilde H(U')) = H(U') \subseteq p(W) \Rightarrow \tilde H(U') \subseteq W \subseteq U$. □

Lemma IV.2.3 (Monodromielemma) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ Wege mit $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$ und $\gamma_1 \simeq^{H}_{\{0,1\}} \gamma_2$. Sei $y_0 \in Y$ mit $p(y_0)=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, seien $\tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2 : I \to Y$ die eindeutigen Hochhebungen mit $\tilde\gamma_1(0)=\tilde\gamma_2(0)=y_0$ und sei $\tilde H$ die eindeutige Hochhebung von H mit Anfangshochhebung $\tilde\gamma_1$. Dann gilt $\tilde\gamma_1 \simeq^{\tilde H}_{\{0,1\}} \tilde\gamma_2$ und insbesondere $\tilde\gamma_1(1)=\tilde\gamma_2(1)$.

Bew. Die Abb. $\tilde H$ löst das HHP

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde\gamma_1"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde H"] & X \end{tikzcd}$$



Es gilt $p \circ \tilde H_t(0) = H_t(0) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: x_0$ für $t \in I$. Also erhalten wir $I \to p^{-1}(x_0)$, $t \mapsto \tilde H_t(0)$. Weil die Faser $p^{-1}(x_0)$ diskret ist, ist diese Abbildung konstant, also $\tilde H_0(0) = \tilde H_1(0)$. Genauso folgt $\tilde H_0(1) = \tilde H_1(1)$. Also gilt $\tilde H_1(0) = \tilde H_0(0) = \tilde\gamma_1(0) = y_0$ und $p \circ \tilde H_1 = H_1 = \gamma_2$. Nach Eindeutigkeit der Wegehochhebung folgt $\tilde H_1 = \tilde\gamma_2$. Daher $\tilde\gamma_2(1) = \tilde H_1(1) = \tilde H_0(1) = \tilde\gamma_1(1)$. □

Sei nun $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung.

Notiz. $\pi_1(p) : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.

Bew. Gilt für eine Schleife $\gamma : (I, \{0,1\}) \to (Y, y_0)$, dass $c_{x_0} \simeq^{H}_{\{0,1\}} p \circ \gamma$, dann zeigt die Hochhebung $\tilde H$ mit Anfang c_{y_0} nach dem Monodromielemma, dass $c_{y_0} \simeq^{\tilde H}_{\{0,1\}} \gamma$. □

Def. IV.2.4 Die Untergruppe $G(Y, y_0) := \mathrm{Bild}(\pi_1(p)) \leq \pi_1(X, x_0)$ heißt *charakteristische Untergruppe* der punktierten Überlagerung p.

Wir wollen nun das Hochhebeproblem

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

lösen. Hierfür muss notwendigerweise gelten

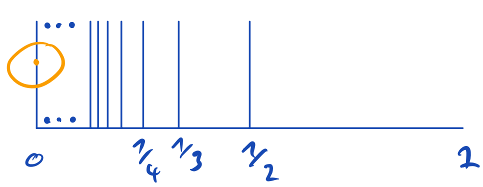
$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\pi_1(f)) &= \mathrm{Bild}(\pi_1(p \circ \tilde{f})) = \\ &= \mathrm{Bild}(\pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f})) \\ &\leq \mathrm{Bild}(\pi_1(p)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, 0) \arrow[d, "p"] \\ (S^1, 1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "\times"] & (S^1, 1) \end{tikzcd}$$

Ziel: Finde eine Bedingung an Z, unter der dieses Kriterium auch hinreichend ist.

Def. IV.2.5 Ein top. Raum heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn in jeder Umgebung eines jeden Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung liegt.

__Bsp.__: (Topologischer Kamm)



- wegzusammenhängend
- nicht lokal wegzusammenhängend

- Jede Mannigfaltigkeit ist lokal wegzusammenhängend.

<u>Satz IV.2.6</u> (Hochhebungskriterium) Sei Z wegzshgd. und lokal wegzshgd. Dann gibt es zu $f: (Z, z_0) \to (X, x_0)$ genau dann eine eindeutige Abb. $\tilde{f}: (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$, wenn $\mathrm{Bild}(\pi_1(f)) \leq G(Y, y_0)$.

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\pi_1(p)"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!"] \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

<u>Bew.</u> <u>Eindeutigkeit</u>: Sei $\tilde{f}'$ eine zweite Hochhebung. Zu $z \in Z$ wähle $\gamma: I \to Z$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Dann sind $\tilde{f} \circ \gamma$ und $\tilde{f}' \circ \gamma$ zwei Hochhebungen des Wegs $f \circ \gamma$ mit Startpunkt y_0. Also folgt $\tilde{f} \circ \gamma = \tilde{f}' \circ \gamma$ und insbesondere $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(\gamma(1)) = \tilde{f}'(\gamma(1)) = \tilde{f}'(z)$.

<u>Existenz</u>: Zu $z \in Z$ wählen wir wie eben $\gamma: I \to Z$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$. Sei $\widetilde{f \circ \gamma}: I \to Y$ die eindeutige Hochhebung von $f \circ \gamma$ mit $\widetilde{f \circ \gamma}(0) = y_0$. Wir setzen $\tilde{f}(z) := \widetilde{f \circ \gamma}(1)$. Dies ist wohldefiniert, denn ist $\gamma': I \to Z$ ein weiterer Weg mit $\gamma'(0) = z_0$ und $\gamma'(1) = z$, dann ist $[f \circ (\gamma \bar{\gamma}')] \in G(Y, y_0)$ und deshalb ist $\widetilde{f \circ (\gamma \bar{\gamma}')} = \widetilde{(f \circ \gamma)(f \circ \bar{\gamma}')} = (\widetilde{f \circ \gamma})(\widetilde{f \circ \bar{\gamma}'})$, eine Schleife, wobei $\widetilde{f \circ \bar{\gamma}'}$ die Weghochhebung mit Startpunkt $\widetilde{f \circ \gamma}(1)$ bezeichnet. Somit folgt

$$\widetilde{f \circ \gamma'}(1) = \overline{\widetilde{f \circ \bar{\gamma}'}}(0) = \widetilde{\overline{f \circ \gamma'}}(0) = \widetilde{f \circ \bar{\gamma}'}(0) = \widetilde{f \circ \gamma}(1).$$

Es gilt $p \circ \tilde{f}(z) = p(\widetilde{f \circ \gamma}(1)) = f \circ \gamma(1) = f(z)$ und so

bleibt nur die Stetigkeit zu zeigen. Sei dazu $z_1 \in Z$ und $U \subseteq Y$ eine O.B.d.A. so kleine Umgebung von $\tilde{f}(z_1)$, dass $p|_U$ ein Homöomorphismus ist. Dann gibt es eine wegzshgde Umgebung V von z_1 mit $f(V) \subseteq p(U)$. Fixiere einen Weg $\gamma: I \to Z$, $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(1)=z_1$. Für $z \in V$ wähle $\gamma': I \to V$, $\gamma'(0) = z_1$, $\gamma'(1) = z$. Dann ist $(\widetilde{f\circ\gamma})(p^{-1}\circ f \circ \gamma') = \widetilde{f \circ (\gamma\gamma')}$, also $\tilde{f}(z) =$
$= p^{-1}(f(\gamma'(1))) = p^{-1}(f(z)) \in U$. $\square$

__Bsp.__ Sei $g \geq 1$. Dann ist jede Abb. $S^2 \xrightarrow{f} \Sigma_g$ nullhomotop (d.h. homotop zu einer konstanten Abb.)

Weil $\pi_1(S^2, \cdot) = \{1\}$, haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R}^2, 0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"] & (0,0) \\
(S^2, \cdot) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (\Sigma_g, \cdot) &
\end{tikzcd}$$

$\square$

IV.3 Klassifizierung der Überlagerungen

Sei (X, x_0) wegzshgd. und lokal wegzshgd.

__Ziel:__ Finde alle wegzshgden Überlagerungen $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ bis auf basispunkterhaltenden Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & (X, x_0') \arrow[dl, "p'"] \\
 & (Y, y_0) &
\end{tikzcd}$$

Wunsch: $\{p : (Y, y_0) \to (X, y_0) \text{ wegzshgd}\}/_{\cong} \xrightarrow{1:1} \{ G \leq \pi_1(X, x_0)\}$

$$[p : (Y, y_0) \to (X, x_0)] \longmapsto G(Y, y_0)$$

Satz IV.3.1 (Eindeutigkeitssatz) Seien $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $p' : (Y', y_0') \to (X, x_0)$ wegzshgde. Überlagerungen.

Dann gilt:

$$\begin{tikzcd} (Y, y_0) \arrow[rr, "\cong", "\varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0') \arrow[dl, "p'"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd} \iff G(Y, y_0) = G(Y', y_0')$$

Bew. „$\Rightarrow$": $G(Y, y_0) = \operatorname{Bild}(p) = \operatorname{Bild}(p' \circ \varphi) = \operatorname{Bild}(p') = G(Y', y_0')$.

„$\Leftarrow$":

$$\begin{tikzcd} & (Y', y_0') \arrow[d, "p'"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \varphi"] \arrow[r, "p"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y', y_0') \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \psi"] \arrow[r, "p'"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (Y, y_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\psi \circ \varphi"] \arrow[r, "p"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (Y', y_0') \arrow[d, "p'"] \\ (Y', y_0') \arrow[ur, dashed, "\varphi \circ \psi"] \arrow[r, "p'"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{(Y, y_0)}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{(Y', y_0')}$. $\square$

Sei nun $G \leq \pi_1(X, x_0)$ gegeben. Zu $x \in X$ setze

$$Y_x := \{ \gamma : I \to X \;:\; \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x \}/_{\sim}, \text{ wobei}$$

$\gamma \sim \gamma' \;:\Leftrightarrow\; [\gamma \overline{\gamma'}] \in G$. Sei $Y := \bigsqcup_{x \in X} Y_x$ und definiere

$p: Y \to X$, $y \mapsto x$ für $y \in Y_x$ sowie $y_0 = [c_{x_0}]$.
Dann gilt $p(y_0) = x_0$ und p ist surjektiv. To do:

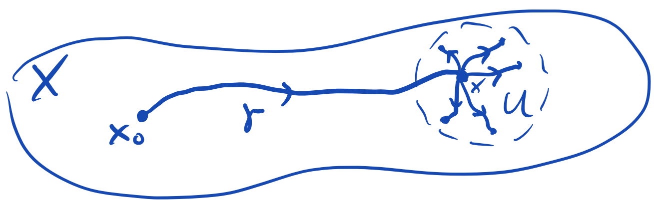
1.) Erkläre wegzshgde Topologie auf Y.

2.) Zeige p ist Überlagerung (stetig, lokal trivial, diskrete Fasern)

3.) Zeige $G(Y, y_0) = G$.

1.) Für $y := [\gamma] \in Y$ und eine offene wegzshgde Umgebung $U \subseteq X$ von $x := \gamma(1)$ sei

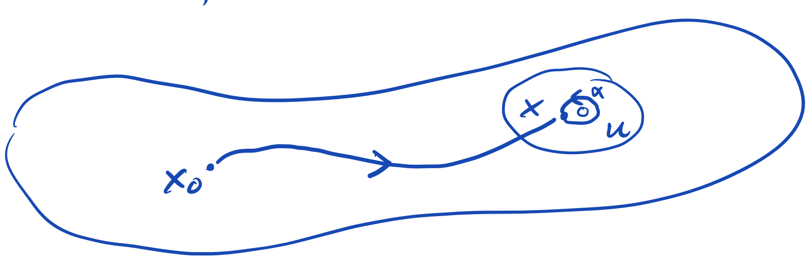
$$V(U, y) = \{ [\gamma\alpha]_\sim : \alpha : I \to U,\ \alpha(0) = x \}.$$



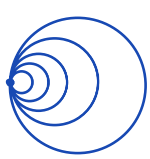
Dies ist wohldefiniert, denn falls $[\gamma\overline{\gamma'}] \in G$, gilt $[\gamma\alpha\,\overline{\gamma'\alpha}] = [\gamma\alpha\bar{\alpha}\overline{\gamma'}] = [\gamma\overline{\gamma'}] \in G$, also $[\gamma\alpha]_\sim = [\gamma'\alpha]_\sim$.
Wir erklären $V \subseteq Y$ sei offen, falls es für alle $y \in V$ ein $V(U, y)$ wie oben gibt mit $V(U,y) \subseteq V$.
Dies definiert eine Topologie, denn $\emptyset, Y$ sind offen, Vereinigungen offener Mengen sind offen und der Schnitt zweier offener Mengen V_1, V_2 ist offen, weil für $y \in V_1 \cap V_2$ und $V(U_1, y) \subseteq V_1$, $V(U_2, y) \subseteq V_2$ auch $U_1 \cap U_2$ wieder eine wegzshgde Umgebung von $p(y)$ enthält, denn X ist lok. wegzshgd.
Nach Konstruktion bilden die $V(U, y)$ eine Umg.basis von y.

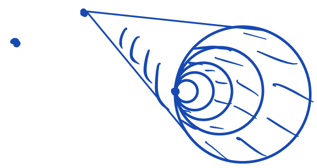
Der Raum Y ist wegzshgd., denn für $y=[\gamma]_\sim \in Y$ ist $I \to Y$, $t \mapsto [I \to Y,\ s \mapsto \gamma(s\cdot t)]_\sim$ ein stetiger Weg von y_0 nach y.

2.) Die Abb. $p: Y \to X$ ist stetig, denn für $y \in Y$ und eine wegzshgde Umgebung U von $p(y)$ gilt $p(V(U,y)) = U$. Wir wollen nun nachweisen, dass $p: Y \to X$ lokal trivial mit diskreten Fasern ist. Letzteres bedeutet, dass es für alle $x \in X$ und $y \in Y_x$ eine offene wegzshgde Umg. $U \subseteq X$ von x gibt mit $Y_x \cap V(U,y) = \{y\}$. Für $y=[\gamma]_\sim$ soll also für alle $\alpha: I \to U$ mit $\alpha(0)=\alpha(1)=x$ gelten $[\gamma\alpha]_\sim = [\gamma]_\sim$, also $[\gamma\alpha\bar{\gamma}] \in G$.



Damit das auch für $G=\{1\}$ erfüllt sein kann, muss man also für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x finden können, sodass jede Schleife an x in U nullhomotop in X ist. Einen solchen Raum nennen wir semilokal einfach zusammenhängend.

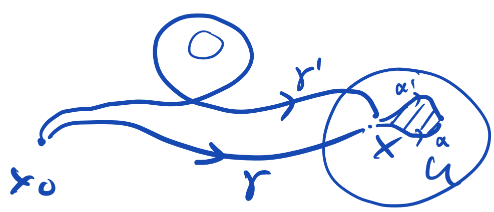
-  Der Hawaiische Ohrring ist nicht semilokal einfach zshgd.

-  Der Kegel über dem Hawaiischen Ohrring ist semilokal einfach zshgd. aber nicht lokal einfach zshgd.

- Mannigfaltigkeiten sind sogar lokal einfach zshgd.

Fortan sei X semilokal einfach zshgd. Dann gilt für hinreichend kleines U, dass $\gamma\alpha\bar{\gamma} \simeq_{\{0,1\}} c_{x_0}$, also $[\gamma\alpha\bar{\gamma}] = 1 \in G$.

Für so ein offenes U gilt außerdem: gibt es $z \in V(U,y) \cap V(U,y')$ für $y, y' \in Y_x$, $y = [\gamma]_\sim$, $y' = [\gamma']_\sim$



, d.h. $z = [\gamma\alpha]_\sim = [\gamma'\alpha']_\sim$

dann folgt $[\gamma]_\sim = [\gamma']_\sim$, also $y = y'$. Demnach gilt $V(U,y) \cap V(U,y') = \emptyset$ für $y \neq y'$. Außerdem sind alle $V(U,y)$ offen und $p|_{V(U,y)}$ ist eine stetige Bijektion und offen, also ein Homöomorph.

Somit erhalten wir einen Homöomorphismus

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in Y_x} V(U,y) \cong \bigsqcup_{y \in Y_x} V(U,y) \cong U \times Y_x,$$

der $p|_{p^{-1}(U)}$ in pr_U überführt.

3.) Für $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $[\gamma] \in G(Y, y_0)$ genau dann, wenn für $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ auch $\tilde{\gamma}(1) = y_0$ gilt. Weil $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]_\sim$, ist dies äquivalent zu

$$[\gamma]_\sim = [c_{x_0}]_\sim \iff [\gamma \overline{c_{x_0}}] \in G \iff [\gamma] \in G .$$

Damit haben wir bewiesen:

<u>Satz IV.3.2</u> (Existenzsatz) Sei (X, x_0) wegzshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $G \leq \pi_1(X, x_0)$ eine wegzshgde Überlagerung $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $G(Y, y_0) = G$.

<u>Bemerkung</u>. Wie wir bereits wissen, ist diese eindeutig bis auf punktierten Iso., sie ist ebenfalls lokal wegzshgd. und auch semilokal einfach zshgd. (durch Hochheben einer Nullhomotopie).

<u>IV.4 Decktransformationen und Galoiskorrespondenz</u>

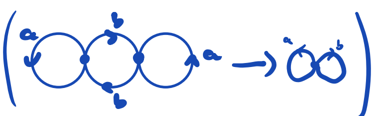
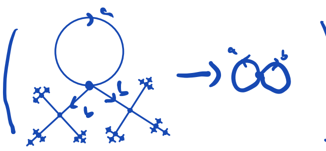
<u>Def. IV.4.1</u> Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung. Eine **Decktransformation** von p ist ein Homöomorphismus $\varphi: Y \xrightarrow{\cong} Y$ mit $p \circ \varphi = p$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich bildet die Menge $\mathcal{D}(p)$ der Decktransformationen eine Gruppe unter Komposition, die **Decktransformationsgruppe** (oder auch Automorphismengruppe von p).

<u>Bspe.</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R} \to S^1) \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n) \cong \mathbb{Z}^n$,

$\mathcal{D}($  $\to \bigcirc) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(S^n \to \mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

$\mathcal{D}($  $) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}($  $) \cong \{1\}$

(jeweils noch ohne Beweis...).

Wir haben eine Wirkung $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) \times Y &\longrightarrow Y \\ (\varphi, y) &\longmapsto \varphi(y) \end{aligned}$$

Ist Y wegzshgd. und lokal wegzshgd., dann ist diese Wirkung **frei** ($G \curvearrowright X$ frei $:\Longleftrightarrow$ für jedes $x \in X$ und jedes $g \in G \setminus \{1\}$ gilt $gx \neq x$): Falls es $y \in Y$ gibt mit $\varphi(y) = y$, gilt $\varphi = \mathrm{id}_Y$ laut Eindeutigkeitsaussage des Hochhebungskriteriums:

$$\begin{tikzcd} & (Y, y) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y) \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p"] & (X, p(y)) \end{tikzcd}$$

Für jedes $x_0 \in X$ erhalten wir durch Einschränkung $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y_{x_0} := p^{-1}(x_0)$. Seien $y_0, y_1 \in Y_{x_0}$. Nach Eindeutigkeitssatz

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

gibt es genau dann $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_0) = y_1$, wenn $G(Y, y_0) = G(Y, y_1)$. Sei $\tilde{\gamma} : I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ und $\tilde{\gamma}(1) = y_1$. Setze $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ und erhalte

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "{[\bar{\tilde{\gamma}}](\;)[\tilde{\gamma}]}", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_1(p)"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, "\pi_1(p)"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "{[\gamma]^{-1}(\;)[\gamma]}", "\cong"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}.$$

Somit gilt $G(Y, y_1) = [\gamma]^{-1} G(Y, y_0) [\gamma]$, d.h. y_1 liegt in der $\mathcal{D}(p)$-Bahn von y_0 genau dann, wenn $[\gamma]$ im Normalisator von $G(Y, y_0)$ liegt.

<u>Def. IV.4.2</u> Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist

$$N_H := N_H^G := \{ g \in G : g^{-1} H g = H \}$$

der Normalisator von H in G.

<u>Def. IV.4.3</u> Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt normal oder Normalteiler, falls $N_H^G = G$ (Notation: $H \trianglelefteq G$).

Bsp. $\cdot\ \{1\}, G \trianglelefteq G$. $\quad \cdot\ H \trianglelefteq N_H^G \leq G$ (N_H^G ist maximal mit dieser Eigenschaft)

- Ist G abelsch, so ist jedes $H \leq G$ normal.
- Für jeden Körper K gilt $SL_n(K) \trianglelefteq GL_n(K)$.
- Die Untergruppe $\{id, (1,2)\} \leq S_3$ ist nicht normal.
- $\{id, (1,2,3), (1,3,2)\} \trianglelefteq S_3$.

Lemma IV.4.4. Für einen Hom. $\varphi: G \to H$ gilt $\ker\varphi \trianglelefteq G$.

Bew. Sei $g_0 \in \ker\varphi$ und $g \in G$. Dann gilt $\varphi(g^{-1}g_0 g) =$
$= \varphi(g)^{-1}\cdot 1 \cdot \varphi(g) = 1$, d.h. $g^{-1}g_0 g \in \ker\varphi$. $\square$

Notiz. $\text{Bild}(\varphi) \leq H$ ist i.A. nur eine Untergruppe.

Für $H \leq G$ bezeichne $G/H = \{gH : g \in G\}$ die Menge der Linksnebenklassen von H. Es ist $[G:H] :=$
$:= |G/H|$ der Index von H in G. Falls $H \trianglelefteq G$, gilt $gH = Hg$, also

$$(g_1 H)(g_2 H) = g_1 (H g_2) H = g_1 (g_2 H) H = g_1 g_2 H,$$

d.h. die Multiplikation in G induziert eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf G/H und die Gruppe G/H heißt Faktorgruppe oder Quotientengruppe von G nach H.

Satz IV.4.5 (Homomorphiesatz) Sei $\varphi: G \to H$ ein Hom. Dann ist $\overline{\varphi}: G/\ker\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, $g(\ker\varphi) \longmapsto \varphi(g)$ ein wohldefinierter Isomorphismus.

Bew. Wohldefiniert: Für $g_1 \in \ker\varphi$ gilt $\varphi(gg_1) = \varphi(g)\varphi(g_1) = \varphi(g)$.
Homomorphismus: klar, weil φ ein Hom. ist. Injektiv:
$\overline{\varphi}(g\ker\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi(g) = 1 \Leftrightarrow g \in \ker\varphi \Leftrightarrow g\ker\varphi = \ker\varphi$. $\square$

Satz IV.4.6 Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung und $G := G(Y, y_0)$. Zu $[\gamma] \in N_G^{\pi_1(X,x_0)}$ sei $\varphi_{[\gamma]} \in \mathcal{D}(p)$ die eindeutige Deckfrafo mit $\varphi_{[\gamma]}(y_0) = \tilde{\gamma}(1)$. Dann definiert

$$N_G \to \mathcal{D}(p), \quad [\gamma] \mapsto \varphi_{[\gamma]}$$

einen Homomorphismus und dieser induziert einen Iso.

$$N_G / G \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(p).$$

Bew. Es gilt $\varphi_{[\alpha]}(\varphi_{[\beta]}(y_0)) = (\varphi_{[\alpha]} \circ \tilde{\beta}^{y_0})(1) \overset{\text{Eind.}}{\underset{\text{Wegeh.}}{=}}$

$= \tilde{\beta}^{\varphi_{[\alpha]}(y_0)}(1) = \tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}^{y_0}(1)}(1) = \varphi_{[\alpha][\beta]}(y_0)$.

Mit der Eindeutigkeitsaussage des Hochhebungssatz. folgt $\varphi_{[\alpha][\beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$. Der Homomorphismus ist surjektiv, denn für $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ sei $\tilde{\gamma} : I \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, $\tilde{\gamma}(1) = \varphi(y_0)$ und $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$, dann gilt $[\gamma] \in N_G$ und $\varphi = \varphi_{[\gamma]}$. Außerdem gilt $\varphi_{[\gamma]} = \mathrm{id}_Y \Leftrightarrow \tilde{\gamma}^{y_0}(1) = y_0 \Leftrightarrow [\gamma] \in G$, d.h. G ist der Kern des Homomorphismus'. $\square$

Satz IV.4.7 Für eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung $p : Y \to X$ sind äquivalent:

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y_x$ transitiv

(d.h. für je zwei Punkte $y_1, y_2 \in Y_x$ gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_1) = y_2$ oder äquivalent: die Fasern Y_x sind die Bahnen von $\mathcal{D}(p) \curvearrowright Y$.)

(ii) Für jedes $y \in Y$ gilt $G(Y,y) \trianglelefteq \pi_1(X, p(y))$.

<u>Bew.</u> Wie bereits gesehen gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(p)$ mit $\varphi(y_0) = y_1$ genau dann wenn für $\tilde{\gamma}: I \to Y$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, $\tilde{\gamma}(1) = y_1$ gilt $[p \circ \tilde{\gamma}] \in N_{G(Y,y_0)}^{\pi_1(X,x_0)}$. $\square$

<u>Def. IV.4.8</u> Eine solche Überlagerung heißt **regulär** oder **normal** oder **galoissch**.

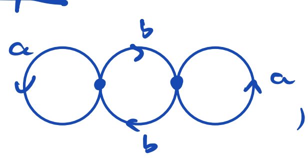
<u>Korollar IV.4.9</u> Für eine reguläre Überlagerung $p: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ gilt

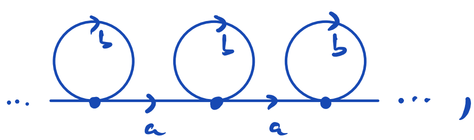
(i) $\mathcal{D}(p) \cong \pi_1(X,x_0) / G(Y,y_0)$.

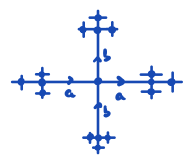
(ii) $|Y_{x_0}| = [\pi_1(X,x_0) : G(Y,y_0)]$

(iii) $Y / \mathcal{D}(p) \cong X$. $\square$

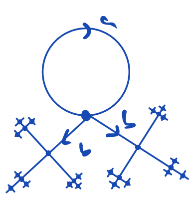
<u>Bspe.</u>

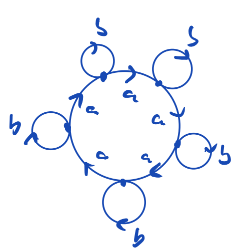


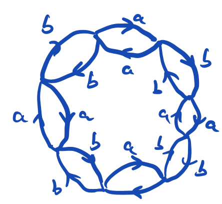




regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/2$ regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}$ regulär, $\mathcal{D}(p) \cong F_2$ (s. Kap. V)







nicht regulär, $\mathcal{D}(p) = \{1\}$ regulär, $\mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/5$ regulär, $\mathcal{D}(p) \cong D_4$
$\cong \langle r, s \mid r^4, s^2, (rs)^2 \rangle$
$\cong \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$ (s. V.5)

<u>Satz IV.4.10</u> Es gilt $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

<u>Bew.</u> Für die Überlagerung $p: (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ gilt $G(\mathbb{R}, 0) = \{1\} \trianglelefteq \pi_1(S^1, 1)$, also $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathcal{D}(p)$. Es ist aber

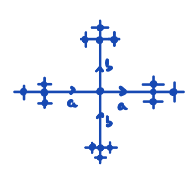
$$\begin{aligned} T: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{D}(p) \\ n &\longmapsto (x \mapsto x + n) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, denn T ist

- ein Homomorphismus: klar.
- injektiv: Aus $x = x + n$ folgt $n = 0$.
- surjektiv: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(p)$, also $p \circ \varphi = p$, d.h. $\exp(2\pi i \varphi(x)) = \exp(2\pi i x)$ und daher $x - \varphi(x) = n_x \in \mathbb{Z}$. Aber $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto n_x = x - \varphi(x)$ ist stetig, also konstant. Daher gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(x) = x + n$, also $T(n) = \varphi$. $\square$

Jetzt ist also bewiesen, dass $S^n \not\cong T^n$ für $n \neq 1$.

<u>Def. IV.4.11</u> Eine wegzshgde und lokal wegzshgde Überlagerung $p: Y \to X$ heißt *universell*, wenn Y einfach zusammenhängend ist.

<u>Bspe.</u>
- $\mathbb{R} \to S^1$
- $\mathbb{R}^n \to T^n$
- $\mathbb{R}^2 \to \Sigma_g$
- $\mathbb{R}^2 \to K$ (Kleinsche Flasche)
- $\mathbb{R} \times I \to M$ (Möbiusband)
- $S^n \to \mathbb{R}P^n$
-  $\to \infty$

Sprechweise. Wir sagen ein top. Raum X sei gut zusammenhängend, wenn er wegzshgd., lokal wegzshgd. und semilokal einfach zshgd. ist.

Korollar IV.4.12 Sei X gut zshgd., $x_0 \in X$. Dann gibt es bis auf punktierten Iso. genau eine universelle Überlagerung $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Warum universell?

Seien $(Y_1, y_1) \xrightarrow{p_1} (X, x_0)$ und $(Y_2, y_2) \xrightarrow{p_2} (X, x_0)$ wegzshgde Überlagerungen eines gut zshgden Raumes (X, x_0). Angenommen $G(Y_1, y_1) \leq G(Y_2, y_2)$.

$$\begin{tikzcd} & (Y_2, y_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (Y_1, y_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Prop. IV.4.13 Die Abb. $f: (Y_1, y_1) \to (Y_2, y_2)$ ist eine Überlagerung und diese ist genau dann regulär, wenn $G(Y_1, y_1) \trianglelefteq G(Y_2, y_2)$.

Bew. Weil $\pi_1(Y_2, y_2) \cong G(Y_2, y_2)$, ist der zweite Teil der Aussage bereits bewiesen.

Zu $\pi_1(p_2)^{-1}(G(Y_1, y_1)) \leq \pi_1(Y_2, y_2)$ gehört eine Überlagerung $p_3: (Y_3, y_3) \to (Y_2, y_2)$

$$\begin{tikzcd} (Y_3, y_3) \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, dashed, shift right, "h"'] & (Y_2, y_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (Y_1, y_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[u, dashed, shift right, "g"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Sei g die Hochhebung von f entlang p_3 und h die Hochhebung von $p_2 \circ p_3$ entlang p_2. Dann gilt

$p_3 \circ g \circ h = f \circ h = p_3$ und

$p_2 \circ h \circ g = p_2 \circ p_3 \circ g = p_2 \circ f = p_2$.

Also ist $g \circ h$ eine Hochhebung von p_3 entlang p_3

und $h \circ g$ " " " p_2 " p_2.

Aus der Eindeutigkeit der Hochhebung folgt $g \circ h = id$ und $h \circ g = id$. Demnach identifiziert der Homöomorphismus h die Abb. f mit p_3, d.h. f ist eine Überlagerung. $\square$

Gilt also $G(Y_1, y_1) \leqslant G(Y_2, y_2)$, gibt es ein kommutatives Dreieck von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd}
(Y_1, y_1) \arrow[dr, "p_3"] \arrow[dd, "p_1"'] & \\
& (Y_2, y_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Für den Spezialfall $G(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ ergibt sich:

<u>Satz IV.4.14</u> (Universelle Überlagerung). Sei (X, x_0) gut zshgd. Dann überlagert $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ regulär in eindeutiger Weise jede andere wegzshgde Überlagerung (Y, y_0) und

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& (Y, y_0) \arrow[dl] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

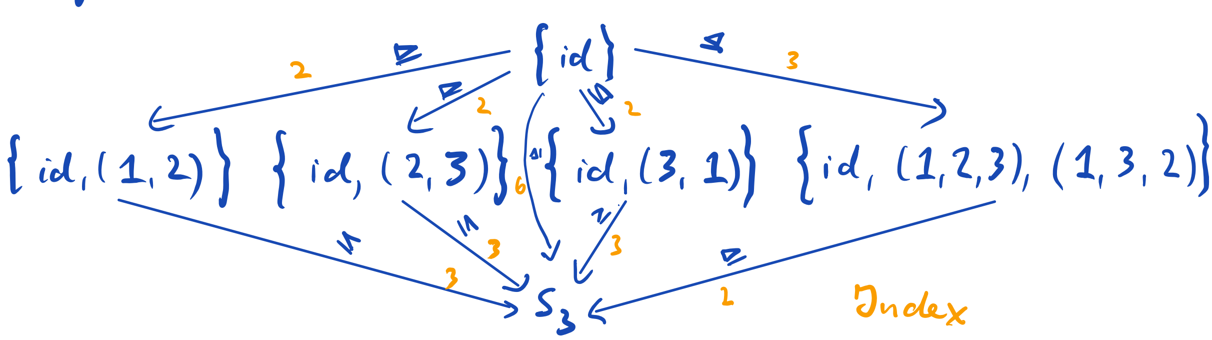
. $\square$

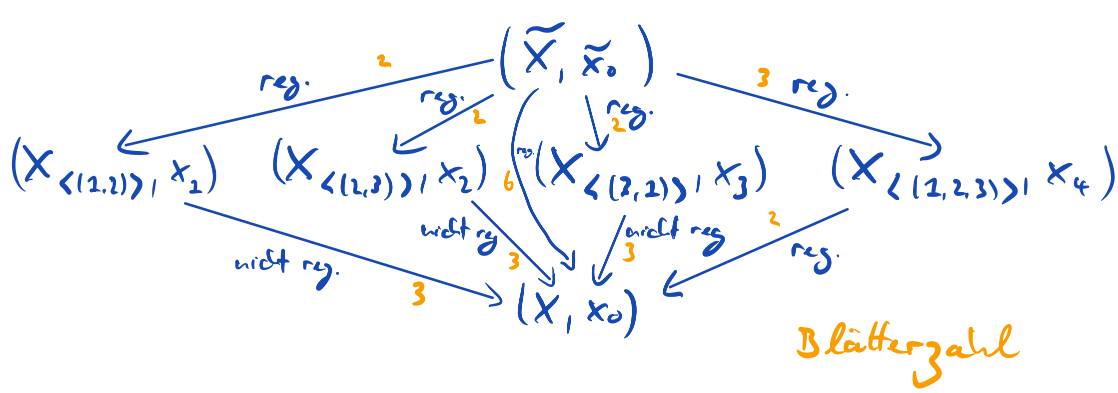
Insbesondere erhält man jede wegzshgde Überlagerung (Y, y_0) als $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)/G(Y,y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)/\pi_1(X,x_0)$ mit $G(Y,y_0) \leq \pi_1(X,x_0) \equiv \mathcal{D}\big((\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)\big)$.

<u>Fazit.</u>

Für einen gut zshgden Raum (X, x_0) besteht eine Galoiskorrespondenz zwischen dem gerichteten System der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und dem gerichteten System der punktierten wegzshgden Überlagerungen von X, die den Index in die Blätterzahl und genau die Normalteiler in normale Überlagerungen überführt. Der ganzen Untergruppe $\pi_1(X, x_0)$ entspricht die triviale, der trivialen Untergruppe entspricht die universelle Überlagerung.

<u>Bsp.</u> $\pi_1(X, x_0) \cong S_3$





Weil $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{RP}^n$ für $n \geq 2$ zweiblättrig universell ist, folgt zudem $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x_0) \cong \mathcal{D}(p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Lemma IV.4.15</u> Es gilt $(\mathbb{RP}^3, x_0) \cong (SO(3), \mathrm{id})$.

<u>**Bew.**</u> Sei $\varphi: D^3 \longrightarrow SO(3)$ die Abb., die $v \in D^3$ auf die Drehung mit Achse $\mathbb{R}v$ und Winkel $|v| \cdot \pi$ abbildet (Rechte-Hand-Regel). Diese ist surjektiv und induziert wegen $\varphi(v) = \varphi(-v)$ für $v \in S^2$ eine stetige Bijektion $\overline{\varphi}: \mathbb{RP}^3 \longrightarrow SO(3)$. Weil $\mathbb{RP}^3$ kompakt und $SO(3)$ Hausdorffsch ist, ist $\overline{\varphi}$ ein Homöomorphismus. $\square$

Es folgt somit $\pi_1(SO(3), \mathrm{id}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, was sich durch den Gürteltrick illustrieren lässt.

V Einführung in die Kategorientheorie

V.1 Kategorien

Viele mathematische Konzepte, z. B. Produkte „$X \times Y$", werden formal völlig gleich eingeführt, egal ob es sich um Gruppen, Vektorräume, top. Räume, etc. handelt.

⇝ Finde abstrakte Def., die diese Spezialfälle liefert.

⇝ Zur Definition von „$X \times Y$" muss aber vorgegeben sein, dass X und Y zwei „Instanzen" (Objekte) desselben „Typs" (Kategorie) sind.

Def. V.1.1 Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einer Klasse von Morphismen (oder Pfeilen) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Wir schreiben $(f: X \to Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ und nennen X Quelle und Y Ziel des Pfeils f. Es gelte:

(i) Zu $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ gibt es einen ausgewählten Pfeil $g \circ f: X \to Z$, die Verknüpfung von f mit g, und wir haben $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) Zu $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, die Identität auf X, sodass $f \circ \mathrm{id}_X = f$ für alle $f: X \to Y$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$ für alle $g: Y \to X$.

Notizen. • „Klasse" statt Menge wegen logischer Schwierigkeiten („Menge der Mengen"!?)

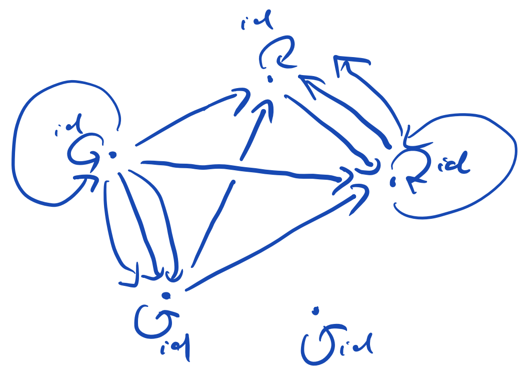
- Zu $X \in Ob(\mathcal{C})$ ist $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ eindeutig. Bew.: $id_X' = id_X \circ id_X' = id_X$.
- Pfeile der Form $f: X \to X$ heißen Endomorphismen.
- Ein Pfeil $f: X \to Y$ heißt Isomorphismus, falls es ein Inverses $g: Y \to X$ gibt mit $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$.
- Hat f ein Inverses, ist dieses eindeutig. Bew.: $g' = g' \circ id_Y = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = id_X \circ g = g$.
- Ist f Endomorphismus und Isomorphismus, heißt f Automorphismus.

Bspe.

Kategorie	Objekte	Morphismen	Isomorphismen
Set	Mengen	Abbildungen	Bijektionen
R-mod	R-Moduln	R-lineare Abb.	R-Iso.
K-Vect	K-Vektorräume	K-lineare Abb.	K-Iso.
Group	Gruppen	Gruppenhomom.	Gruppeniso.
Ab	Abelsche Gr.	"	"
Top	Top. Räume	Stetige Abb.	Homöomorph.
$Top_\bullet$	Punkt. top. R	Basispunkterhaltende stetige Abb.	B.pkt. erhalt. Homöom.
HoTop	Top. Räume	Homotopieklassen stetiger Abb.	Homotopieklassen von Homotopieäquiv.
$HoTop_\bullet$	Punkt. top. R.	Punkt. Hom. top. kl. basispkterh. stet. Abb.	Punkt. Hom. top. kl. basispkt.erh. Hom.äquiv.
$Top^{(2)}$	Paare (X,A) top. R.e, sd. $A \subseteq X$	Stetige Abb., die Unterr. in Unterr. abbild.	Homö.n, die sich zu Homö.n einschränken

Eine Kategorie ist also ein gerichteter Graph mit Schleifen und Mehrfachkanten

+ assoz. Verknüpfung
+ Identitäten



<u>Def. V.1.2</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann ist die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ gegeben durch $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ und $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ mit Komposition $f \circ g$ in $\mathcal{C}^{op}$ gegeben durch $g \circ f$ in $\mathcal{C}$.

<u>V.2 Funktoren</u>

<u>Def. V.2.1</u> Ein (kovarianter) Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von einer Kat. $\mathcal{C}$ zu einer Kat. $\mathcal{D}$ ordnet jedem $X \in Ob(\mathcal{C})$ ein Objekt $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ und jedem $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ zu, sodass

(i) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,

(ii) $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{op}$ nach $\mathcal{D}$, d.h. für $f : X \to Y$ gilt $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ und $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Bspe.

(i) Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es einen Identitätsfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

(ii) Vergissfunktoren $\underline{K\text{-Vect}} \to \underline{Ab}$, $\underline{Ab} \to \underline{Group}$, ...

(iii) Die Fundamentalgruppe definiert $\pi_1 : \underline{Top_\bullet} \to \underline{Group}$.

Für $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ erhalten wir $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

(iv) Wir haben Funktoren $\underline{Top} \to \underline{HoTop}$ und $\underline{Top_\bullet} \to \underline{HoTop_\bullet}$, die f in $[f]$ überführen.

(v) Schon gesehen: der Funktor π_1 faktorisiert über $\underline{HoTop_\bullet}$:

$$\begin{tikzcd} & \underline{HoTop_\bullet} \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ \underline{Top_\bullet} \arrow[ur] \arrow[rr, "\pi_1"] & & \underline{Group} \end{tikzcd}.$$

(Hierbei genutzt: Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ kann man zu $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ komponieren.)

(vi) Abelisierung ist ein Funktor $(\cdot)_{ab} : \underline{Group} \to \underline{Ab}$, der aus G die abelsche Gruppe $G/[G,G]$ macht, wobei $[G,G] \leq G$ von allen Kommutatoren $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ erzeugt wird. Offensichtlich gilt $[G,G] \trianglelefteq G$ und $f([G,G]) \subseteq [H,H]$ für $f : G \to H$, also erhalten wir $f_{ab} : G_{ab} \to H_{ab}$.

(vii) Der freie Vektorraum ist ein Funktor $F : \underline{Set} \to \underline{K\text{-Vect}}$ und ordnet einer Menge X den Vektorraum der formalen K-Linearkombinationen $F(X) = \{ \sum_{x \in X} \lambda_x x : \lambda_x \in K, \lambda_x = 0$

für fast alle $x \in X\}$ zu. Demnach ist $X \subseteq F(X)$ eine Basis und $f: X \to Y$ induziert $F(f): F(X) \to F(Y)$ durch eindeutige K-lineare Fortsetzung.

(viii) Dualisieren ist ein kontravarianter Funktor $D: \underline{K\text{-Vect}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ mit $D(V) = V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ und für $f: V \to W$ haben wir $D(f): W^* \to V^*,\ \delta \mapsto \delta \circ f$

(ix) Fixiere einen K-Vektorraum W. Dann ist $(\cdot) \otimes_K W: \underline{K\text{-Vect}} \longrightarrow \underline{K\text{-Vect}}$ ein kovarianter Funktor. Für $f: V \to U$ erhalten wir $f \otimes \mathrm{id}_W: V \otimes_K W \to U \otimes_K W$ mit $f \otimes \mathrm{id}_W(v \otimes w) = f(v) \otimes w$ für elementare Tensoren $v \otimes w \in V \otimes_K W$.

Konstruktion: $V \otimes_K W = F(V \times W) \Big/ \left\langle \begin{matrix} (\lambda u + \mu v, w) - \lambda(u,w) - \mu(v,w), \\ (v, \lambda u + \mu w) - \lambda(v,u) - \mu(v,w) \end{matrix} \right\rangle$

<u>Slogan</u>: Eine funktorielle Konstruktion muss unabhängig von Wahlen sein.

<u>V.3 Natürliche Transformationen</u>

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Wahl einer Basis $B \subset V$ liefert die duale Basis $B^* \subset V^*$ definiert durch $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ und $b_i \mapsto b_i^*$ definiert einen Iso. $V \xrightarrow{\cong} V^*$. Einen Iso. $V \xrightarrow{\cong} V^{**}$

gibt es „natürlich" und ohne jede Wahl: $ev_V : v \mapsto (V^* \to K, \delta \mapsto \delta(v))$. Vorteil: Für jede K-lineare Abb. $f : V \to W$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "ev_V"'] & W \arrow[d, "ev_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd},$$

denn für $\delta \in W^{**}$ und $v \in V$ gilt $ev_W(f(v))(\delta) = \delta(f(v)) =$
$= ev_V(v)(f^*(\delta)) = f^{**}(ev_V(v))(\delta)$, d.h. $ev_W \circ f = f^{**} \circ ev_V$.

<u>Def. V.3.1</u> Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\eta : F \to G$ ordnet jedem $A \in Ob(\mathcal{C})$ derart einen Morphismus $\eta_A \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$ zu, dass für jeden Pfeil $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{D}$ kommutiert.

Wir nennen η_A die Komponente von η bei A.

<u>Bspe.</u> (i) Gerade gesehen: $\eta = ev : Id_{\underline{K\text{-Vect}}} \to DD = (\ )^{**}$

(ii) Eine Gruppe G definiert eine Kategorie $\underline{G}$ mit genau einem Objekt „$\bullet$" und $Hom_{\underline{G}}(\bullet, \bullet) = G$ mit der Gruppenmultiplikation als Verknüpfung und $id_\bullet = 1 \in G$.

Eine G-Wirkung $G \curvearrowright X$ ist nun dasselbe wie ein Funktor $F: \underline{G} \to \underline{\mathrm{Set}}$. Die Menge ist $X := F(\bullet)$ mit Wirkung $g \cdot x := F(g)(x)$. z.z.:

1) $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$ 2.) $1 \cdot x = x$.

1) $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (F(h)(x)) = F(g)(F(h)(x)) =$
$= F(gh)(x) = (g \cdot h) \cdot x$

2.) $1 \cdot x = F(1)(x) = F(\mathrm{id}_\bullet)(x) = \mathrm{id}_{F(\cdot)}(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$.

Für $F, G: \underline{G} \to \underline{\mathrm{Set}}$ ist eine nat. Trafo. $\eta: F \Rightarrow G$ eine äquivariante Abbildung, denn für $x \in X$ bedeutet $(\eta_\bullet \circ F(g))(x) = (G(g) \circ \eta_\cdot)(x)$ gerade $\eta_\cdot(g \cdot x) = g \cdot \eta_\cdot(x)$.

<u>Def V.3.2</u> Ein natürlicher Isomorphismus $\eta: F \xrightarrow{\cong} G$ ist eine nat. Trafo., deren Komponenten Iso.en sind.

<u>Fangfrage:</u> Ist es: $\mathrm{Id}_{\underline{K\text{-Vect}}} \to (\cdot)^{**}$ ein nat. Iso.?
Nein, denn $V^{**} \not\cong V$, falls V unendlich-dim.
Aber es ist ein nat. Iso., wenn man Id und $(\cdot)^{**}$ auf $\underline{\text{fin-dim-}K\text{-Vect}}$ betrachtet.

<u>Def V.3.3</u> Eine Äquivalenz von Kategorien besteht aus Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, sodass $G \circ F$ und $F \circ G$ natürlich isomorph zu $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ sind.

Bsp. • $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)} \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\pi_1(X,x_0)}$ (s. Hausaufgabe)

• Sei L/K eine Galoiserweiterung. $\mathrm{Zw.\,K\ddot{o}rper}_{L/K} \to \mathrm{Sub}_{\mathrm{Gal}(L/K)}$

$Z \mapsto \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \sigma|_Z = \mathrm{id}_Z\}$,

$\mathrm{Sub}_{\mathrm{Gal}(L/K)} \to \mathrm{Zw.\,K\ddot{o}rper}_{L/K}$, $H \mapsto L^H$.

V.4 Adjunktion

Für einen Vergissfunktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ stellt sich die Frage nach der allgemeinsten und effizientesten Konstruktion in umgekehrter Richtung.

Bsp. • **K-Vect** $\longrightarrow$ **Set** $\to$ Freier Vektorraum (Bsp. (vii))

• **Ab** $\to$ **Group** $\rightsquigarrow$ Abelisierung (Bsp. (vi))

Diese Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sind „linksadjungiert" zu $\mathcal{G}$.

Def. V.4.1 Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt $\mathcal{F}$ linksadjungiert zu $\mathcal{G}$ (und $\mathcal{F}$ heißt rechtsadjungiert zu $\mathcal{F}$), falls es zu jedem $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ eine in A und B natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{G}(B)), \quad f \mapsto \bar{f}$$

gibt.

„Natürlich in A": Für festes $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ sind

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\cdot), B)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \mathcal{G}(B)) : \mathcal{C}^{op} \to$ **Set**

natürlich isomorph. Hier (und anderswo) nehmen wir an, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ seien lokal klein, d.h. $\mathrm{Hom}(X,Y)$ ist tatsächlich stets eine Menge. Es gilt also für $f: A' \to A$ in $\mathcal{C}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)$, dass

$$\overline{\varphi} \circ f = \overline{\varphi \circ F(f)}$$

„Natürlich in B" bedeutet: Für festes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $g: B \to B'$ in $\mathcal{D}$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B)$ gilt

$$G(g) \circ \overline{\varphi} = \overline{g \circ \varphi}.$$

„Adjunktion" wegen formaler Ähnlichkeit zu Hilbertraumoperatoren: $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$.

<u>Bsp.</u> • Freier Vektorraum $F: \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{K\text{-Vect}}$ ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $G: \underline{K\text{-Vect}} \to \underline{\mathrm{Set}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\underline{K\text{-Vect}}}(F(X), V) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Set}}}(X, G(V)), \quad \varphi \mapsto \varphi|_X .$$

Bijektion wegen eindeutiger K-linearer Fortsetzung. Natürlichkeit ergibt sich aus den obigen Formeln.

• Linksadjungiert zum Vergissfunktor $G: \underline{\mathrm{Group}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ ist der Funktor „Freie Gruppe" $F: \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Group}}$: Für eine Menge S bestehe $F(S)$ aus allen „Wörtern", z.B. $a^3 b^{-2} a a b^{-5} b^5 c$, aus dem Alphabet S mit den offensichtlichen

Identifizierungen, z. B. $aa^{-1}b = b$, $c^2c^{-3} = c^{-1}$, ...
Komposition durch Konkatenation. Einselement ist das leere Wort „1" oder „e". Zu einer Abb.
$f: S_1 \to S_2$ gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(S_1) \to \mathcal{F}(S_2)$,

$$\mathcal{F}(f)(abc^{-3}b) = f(a)f(b)f(c)^{-3}f(b).$$

Die Funktoreigenschaften sind klar, die natürliche Bijektion der Hom-Mengen ergibt sich genauso.

Für jede Gruppe H erhalten wir einen Gruppenhom.

$$\varepsilon_H: \mathcal{F}(\mathcal{G}(H)) \to H,$$

der sich auf dem Alphabet H zu id_H einschränkt. Dies definiert eine nat. Trafo. $\varepsilon: \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to Id_{\underline{Group}}$ (die „Koeins" der Adjunktion). Wir erhalten einen Iso.

$$\overline{\varepsilon_H}: \mathcal{F}(\mathcal{G}(H))/\ker \varepsilon_H \xrightarrow{\cong} H,$$

d.h. jede Gruppe ist Quotient einer freien Gruppe!

<u>Def. V.4.2</u> Sei S eine Menge und $R \subseteq \mathcal{F}(S)$. Dann heißt das Paar (S, R) Präsentation der Gruppe G, falls

$$G \cong \mathcal{F}(S)/\langle\langle R \rangle\rangle,$$

wobei $\langle\langle R \rangle\rangle$ den kleinsten Normalteiler von $\mathcal{F}(S)$ bezeichnet, der R enthält. Notation: $G = \langle S \mid R \rangle$.

Vermöge $\overline{\varepsilon}_H$ hat jede Gruppe H eine Präsentation.
Man sucht aber effiziente Präsentationen, z. B.

$$\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

<u>Bew.</u>: Laut Adjunktion setzt sich $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$ zu einem surj. Hom. $p: F(\{a,b\}) \to \mathbb{Z}^2$ fort und $\langle\langle \{aba^{-1}b^{-1}\} \rangle\rangle \leq \ker p$. Wir erhalten somit $\overline{p}: F(\{a,b\}) / \langle\langle \{aba^{-1}b^{-1}\} \rangle\rangle \to \mathbb{Z}^2$.
Z.z.: $\overline{p}$ ist inj. Sei also $x = [a]^{n_1}[b]^{m_1} \cdots [a]^{n_k}[b]^{m_k} \in \ker \overline{p}$.
Dann ergibt $\overline{p}(x) = 0$, dass $\begin{pmatrix} n_1 + \dots + n_k \\ m_1 + \dots + m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also
$x = [a]^{n_1 + \dots + n_k} [b]^{m_1 + \dots + m_k} = 1.$ $\square$

<u>V.5 Limes und Kolimes</u>

Erinnerung: Suchen kategorielle Def. des Produkts „$X \times Y$".
Beobachtung: Haben Projektionen

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

<u>Def V.5.1</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Ein Produkt von X und Y ist ein Objekt $P \in Ob(\mathcal{C})$ mit Pfeilen $pr_X: P \to X$ und $pr_Y: P \to Y$, die die universelle Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddl, bend right, "f_X"'] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ & P \arrow[dl, "pr_X"'] \arrow[dr, "pr_Y"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

erfüllen.

D.h. zu $f_X : Q \to X$ und $f_Y : Q \to Y$ gibt es genau einen Pfeil $f : Q \to P$ mit $f_X = pr_X \circ f$ und $f_Y = pr_Y \circ f$.
Notation: $f = f_X \times f_Y$ oder $f = (f_X, f_Y)$.

Produkte müssen nicht existieren, aber wenn, sind sie eindeutig:

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dddl, bend right, "pr'_X"'] \arrow[dddr, bend left, "pr'_Y"] & \\
& P \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddl, bend right, "pr_X"'] \arrow[ddr, bend left, "pr_Y"] & \\
& P' \arrow[dl, "pr'_X"'] \arrow[dr, "pr'_Y"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage der univ. Eig. folgt $g \circ f = id_{P'}$.
Genauso $f \circ g = id_P$. („Allgemeiner Unsinn")

<u>Bsp.</u> In <u>Set</u>, <u>Group</u>, <u>K-Vect</u>, <u>R-Mod</u>, <u>Top</u>, <u>HoTop</u> ist das kategorische Produkt das gewohnte Produkt.
<u>Achtung</u>: In <u>$\mathrm{Top}^{(2)}$</u> gilt $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, A \times B)$, aber manche Autoren schreiben $(X, A) \times (Y, B)$ für $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$.
Produkte sind Spezialfälle von Faserprodukten.

<u>Def V.5.2</u> Das Faserprodukt oder Pullback des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ besteht aus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Pfeilen $p_X : P \to X$ und $p_Y : P \to Y$, sd.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutiert und universell ist, d.h.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] \arrow[drr, bend left, "f_Y"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

Notation:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

„kartesisches Quadrat"

Wie oben sind Faserprodukte eindeutig.

__Bsp.__ · In __Set__ gibt es immer Faserprodukte. Für

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

ist $P = \{(x,y) \in X \times Y : s(x) = t(y)\}$

und $p_X = pr_X|_P$, $p_Y = pr_Y|_P$. Für $X \xleftarrow{f_X} Q \xrightarrow{f_Y} Y$ ist $f : Q \to P$, $q \mapsto (f_X(q), f_Y(q))$

· In __Top__ wie oben mit Teilraumtop. der Produkttop.

Hausaufgabe: Ist $p : E \to B$ ein Faserbündel und $f : B' \to B$ stetig, so ist $p' : f^*E \to B'$ in

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

ein Faserbündel ($\rightsquigarrow$ Funktor $f^* : \underline{\mathrm{Cov}_B} \to \underline{\mathrm{Cov}_{B'}}$)

Suchen weitere Verallgemeinerung von Faserprodukten.

Eine Kategorie heißt **klein**, wenn die Klasse der Objekte und die Klassen der Morphismen jeweils Mengen bilden.

<u>Def V.5.3</u> Ein **Diagramm** in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $D: I \to \mathcal{C}$ aus einer kleinen Kategorie I (der **Indexkategorie**).

<u>Bsp.</u>

- $$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "id"] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[loop above, "id"] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop below, "id"] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop below, "id"] \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad D \quad} \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

- Sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\;1_P^I\;} \mathcal{C} \\ X &\longmapsto P \\ (f: X \to Y) &\longmapsto id_P . \end{aligned}$$

<u>Def V.5.4</u> Ein **Kegel** auf dem Diagramm $D: I \to \mathcal{C}$ besteht aus einem Objekt $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und einer nat. Trafo. $\eta: 1_P^I \longrightarrow D$.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad D \quad} \begin{tikzcd} P \arrow[r, "id_P"] \arrow[d] & P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ A \arrow[dr, phantom, ""] & B \arrow[dr] & \\ & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ A \arrow[rr] \arrow[urr, phantom] & & B \arrow[rr] & & C \\ \end{tikzcd}$$

Ein Kegel besteht also aus der Kegelspitze P und Pfeilen von der Spitze in jedes Objekt des Diagramms, sodass alle Dreiecke (Kegelwände) kommutieren.

<u>Def. V.5.5</u> Ein **Limes** auf (oder von) $D: I \to \mathcal{C}$ ist ein universeller Kegel $\eta: 1_P^I \to D$: für jeden weiteren Kegel $\eta': 1_{P'}^I \to D$ gibt es einen eindeutigen Pfeil $f: P' \to P$ mit $\eta'_i = \eta_i \circ f$ für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
D(i) \arrow[rr] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Limiten sind bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig nach allgemeinem Unsinn. Notation: $P = \lim D = \varprojlim D$

<u>Bsp.</u>
- Das Produkt von $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist der Limes des Diagramms $\bullet \quad \bullet \xrightarrow{D} X \quad Y$
- Das Faserprodukt von $X \xrightarrow{s} Z \xleftarrow{t} Y$ ist der Limes von
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \xrightarrow{D} \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}.$$

Zu kategoriellen Begriffen erhält man **duale** Begriffe durch „Umkehren aller Pfeile".

Bsp. Ein Kokegel auf $D: \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist eine nat. Trafo. $\eta: D \to 1_P^{\mathcal{I}}$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & C \arrow[dl] \\
 & P &
\end{tikzcd}$$

Def. V.5.6 Ein Kolimes von $D: \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ist ein universeller Kokegel $\eta: D \to 1_P^{\mathcal{I}}$:

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & & D(j) \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
 & P \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \\
 & P' &
\end{tikzcd}$$

Wieder ist ein Kolimes bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig. Notation: $P = \operatorname{colim} D = \varinjlim D$.

Bsp. • Der Kolimes von $\bullet \quad \bullet \xrightarrow{D} X \quad Y$ heißt Koprodukt von X und Y. Notation: $X \amalg Y$.
Zu $X \amalg Y$ gehören also Morphismen $X \xrightarrow{i_X} X \amalg Y \xleftarrow{i_Y} Y$ mit universeller Eigenschaft

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_X"] \arrow[ddr, bend right, "f_X"'] & & Y \arrow[dl, "i_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "f_Y"] \\
 & X \amalg Y \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

Notation: $f = f_X \amalg f_Y$.

Bsp.
- In **Set** ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.
- In **Top** und **HoTop** ist das Koprodukt von Räumen X und Y die top. Summe $X \amalg Y = X \sqcup Y$.
- In $\mathbf{Top}_\bullet$ und $\mathbf{HoTop}_\bullet$ ist $(X, x_0) \amalg (Y, y_0)$ die Einpunktvereinigung (engl. wedge sum) $(X \vee Y, \bullet)$.
- In **R-Mod** gilt $M \amalg N = M \oplus N$. Beachte: $M \oplus N \cong M \times N$, aber für unendliches I gilt i. A. $\bigoplus_{i \in I} M_i \not\cong \prod_{i \in I} M_i$.

Lemma V.5.7 Koprodukte existieren in **Group**. Das Koprodukt von G und H heißt freies Produkt (Notation $G * H$) und für $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ und $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$ gilt

$$G * H = \langle S_G \amalg S_H \mid R_G \amalg R_H \rangle.$$

Bew. Nachweis der universellen Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
F(S_G) \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[ddddr, bend right=60, "f"'] & & F(S_H) \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[ddddl, bend left=60, "g"] \\
& F(S_G \amalg S_H) \arrow[dd] \arrow[ddd, bend right, "u"'] & \\
\langle S_G \mid R_G \rangle \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & & \langle S_H \mid R_H \rangle \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
& \langle S_G \amalg S_H \mid R_G \amalg R_H \rangle \arrow[d, "\bar{u}"] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Die Homomorphismen f und g sind durch ihre Einschränkungen auf S_G und S_H bestimmt ($\underline{\mathrm{Group}} \leftrightarrows \underline{\mathrm{Set}}$ - Adjunktion). Nach univ. Eig. des Koprodukts in $\underline{\mathrm{Set}}$ erhalten wir $S_G \amalg S_H \to K$ und daraus nach $\underline{\mathrm{Group}} \leftrightarrows \underline{\mathrm{Set}}$ - Adjunktion $u : F(S_G \amalg S_H) \to K$. Da f und g über $\langle S_G \mid R_G \rangle$ bzw. $\langle S_H, R_H \rangle$ faktorisieren, erhalten wir $\bar{u} : \langle S_G \amalg S_H \mid R_G \amalg R_H \rangle \to K$ und $\bar{u}$ ist durch $\bar{u}|_{S_G \amalg S_H}$ eindeutig bestimmt, also durch f und g. $\square$

Der Kolimes eines Diagramms

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd} \xrightarrow{D} \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$ heißt **Kofaserprodukt** oder **Pushout**. Es besteht also aus einem $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Pfeilen $X \xrightarrow{i_X} Z \xleftarrow{i_Y} Y$ mit universeller Eigenschaft

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ X \arrow[r, "i_X"] \arrow[drr, bend right, "f_X"'] & Z \arrow[dr, dashed, "\exists !"] & \\ & & Q \end{tikzcd} .$$

Notation:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

„**kokartesisches Quadrat**".

__Lemma V.5.8__ Pushouts existieren in __Top__ und sind gegeben durch

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X \amalg Y/_\sim \end{tikzcd},$$

wobei „$\sim$" die feinste Äquivalenzrel. auf $X \amalg Y$ bezeichnet, für die $s(a) = t(a)$ für alle $a \in A$ gilt.

__Bew.__ Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f_Y"] & \\ X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f_X"'] & X \amalg Y/_\sim \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & Q \end{tikzcd}.$$

Nach univ. Eig. des Koprodukts gibt es $f_X \amalg f_Y : X \amalg Y \to Q$ und es gilt

$(f_X \amalg f_Y)(s(a)) = f_X(s(a)) = f_Y(t(a)) = (f_X \amalg f_Y)(t(a))$.

Nach univ. Eig. der Quotiententopologie erhalten wir $\overline{f_X \amalg f_Y} : X \amalg Y/_\sim \to Q$ wie gewünscht.

Ist $g : X \amalg Y/_\sim \to Q$ ein weiterer Pfeil wie oben, faktorisiert er $f_X \amalg f_Y$ über $X \amalg Y/_\sim$, also $g = \overline{f_X \amalg f_Y}$ nach Eind. in der univ. Eig. der Quot.top. $\square$

Ist $s : A \hookrightarrow X$ die Inklusion eines Teilraums, so ist $X \amalg Y/_\sim$ die Anheftung von X an Y entlang t.

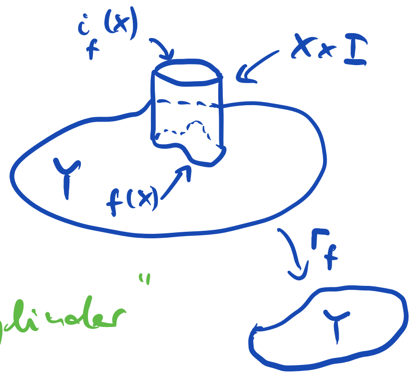
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X \sqcup_f Y \end{tikzcd} .$$

Insbes.:

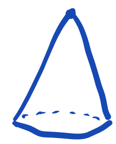
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X/A \end{tikzcd} .$$

Spezialfälle:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r] & M_f \end{tikzcd}$$



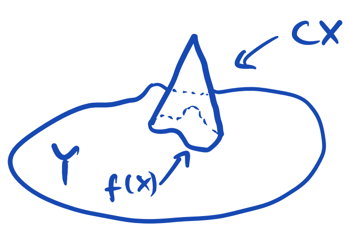
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r] & CX \end{tikzcd}$$



„Abbildungszylinder" „Kegel"

Die Inklusion $i : X \hookrightarrow CX$ der Basis zeigt, dass jeder Raum in einen zusammenziehbaren Raum einbettet. Zudem gilt $f = r_f \circ i_f$, d.h. jede stetige Abb. f ist Komposition einer Inklusion und einer Homotopieäquiv.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & C_f \end{tikzcd}$$



„Abbildungskegel" („Verbesserung von $Y/\mathrm{im} f$")

<u>Prop V.5.9</u> Sei K ein kompakter Raum. Ist

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_2"] \\ X \arrow[r, "g_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

kokartesisch in <u>Top</u>, so auch

$$\begin{tikzcd} A \times K \arrow[r, "f_2 \times id"] \arrow[d, "f_1 \times id"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \times K \arrow[d, "g_2 \times id"] \\ X \times K \arrow[r, "g_1 \times id"] & Z \times K \end{tikzcd} .$$

__Bew.__ Nach dem letzten Lemma ist

$$g_1 \amalg g_2 : X \amalg Y \to Z$$

eine Identifizierung. Nach Blatt 4/5, Aufgabe 2 ist auch

$$g_1 \times id_K \amalg g_2 \times id_K : X \times K \amalg Y \times K \to Z \times K$$

eine Identifizierung. Wir erhalten einen induzierten Homöo.

$$X \times K \amalg Y \times K /_{\sim} \xrightarrow{\cong} Z \times K$$

mit $(x, k_1) \sim (y, k_2)$ falls $g_1(x) = g_2(y)$ und $k_1 = k_2$ oder äquivalent, es gibt $a \in A$ mit $f_1(a) = x$, $f_2(a) = y$ und $k_1 = k_2$. Mit dem Lemma ist alles gezeigt. $\square$

__Lemma V.5.10__ Pushouts existieren in __Group__ und sind gegeben durch

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & H \arrow[d] \\ G \arrow[r] & (G * H)/N \end{tikzcd},$$

wobei $N = \langle\langle s(a) t(a)^{-1} : a \in A \rangle\rangle \trianglelefteq G * H$.

__Bew.:__ Zu zeigen:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & H \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ G \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "f"'] & (G * H)/N \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & Q \end{tikzcd}.$$

Nach univ. Eig. des Koprodukts erhalten wir

$$f * g : \; G * H \longrightarrow Q .$$

Weil $f*g(s(a)t(a)^{-1}) = f(s(a))\, g(t(a))^{-1} = 1$,
erhalten wir

$$\overline{f*g} : \; G*H/_N \longrightarrow Q .$$

Die Eind. folgt wie oben aus der univ. Eig. der Quotientengruppe. $\square$

Für $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ und $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ gilt also
$G*H/_N = \langle S_1 \amalg S_2 \mid R_1 \amalg R_2 \amalg \{ s(a)t(a)^{-1} : a \in A \} \rangle$.

Im Spezialfall, dass s und t Inklusionen von Untergruppen sind, heißt

$$G*H/_N =: G *_A H$$

amalgamiertes (freies) Produkt von G und H.

<u>Bsp.</u>: $\mathbb{Z}/_6 *_{\mathbb{Z}/_2} \mathbb{Z}/_4 \cong SL(2;\mathbb{Z})$.

VI Berechnung von Fundamentalgruppen

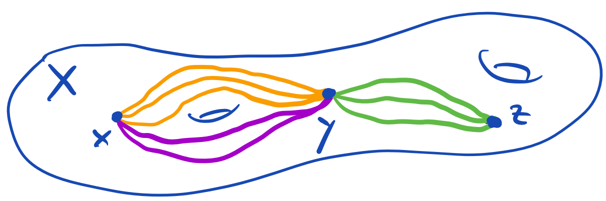
VI.1 Das Fundamentalgruppoid

Def VI.1.1 Ein Gruppoid ist eine kleine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

Def VI.1.2 Sei X ein top. Raum. Das Fundamentalgruppoid von X ist die kleine Kategorie $\Pi(X)$ mit $Ob(\Pi(X)) = X$ und für $x, y \in X$ ist

$$\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{\gamma : I \to X : \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\} / \simeq_{\{0,1\}}$$

mit Konkatenation als Komposition (für $x \xrightarrow{[\gamma_1]} y \xrightarrow{[\gamma_2]} z$ gilt $[\gamma_2] \circ [\gamma_2] = [\gamma_1 \gamma_2]$) und Identitäten $id_x = [c_x]$ für $x \in X$.



Notiz.
- $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$
- $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$

Def VI.1.3 Eine Kategorie heißt zusammenhängend, wenn man je zwei Objekte durch Pfeile verbinden kann:

$$A \longleftarrow B \longrightarrow C \longleftarrow D$$

($\mathrm{Hom}(A, D) = \emptyset$ ist erlaubt, für Gruppoide folgt $\mathrm{Hom}(A, D) \neq \emptyset$)

Notiz. $\Pi(X)$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ X wegzusammenhängend.

Lemma VI.1.4 Sei $\mathcal{G}$ ein nichtleeres zshgdes Gruppoid, $x \in Ob(\mathcal{G})$.
Dann ist der Inklusionsfunktor

$$\begin{aligned} I_x : \underline{Aut_{\mathcal{G}}(x)} = \underline{Hom_{\mathcal{G}}(x,x)} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \bullet &\longmapsto x \\ g : x \to x &\longmapsto g : x \to x \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Bew. Wähle $f_y : x \to y$ für alle $y \in Ob(\mathcal{G})$ (Auswahlaxiom, $\mathcal{G}$ klein) und sei dabei $f_x = id_x$. Definiere

$$\begin{aligned} R : \mathcal{G} &\longrightarrow \underline{Aut_{\mathcal{G}}(x)} \\ y &\longmapsto \bullet \\ g : y \to z &\longmapsto f_z^{-1} \circ g \circ f_y . \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr, bend left, "g"] & & z \\ & x \arrow[ul, "f_y"] \arrow[ur, "f_z"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt $R \circ I_x = Id_{\underline{Aut_{\mathcal{G}}(x)}}$. Zudem ist $f : I_x \circ R \to Id_{\mathcal{G}}$ ein nat. Iso., denn für $g : y \to z$ haben wir

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f_y"] \arrow[d, "f_y"', "\cong"] & y \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & z \arrow[r, "f_z^{-1}"] & x \arrow[d, "f_z", "\cong"'] \\ y \arrow[rrr, "g"] & & & z \end{tikzcd} .$$

$\square$

Kor. VI.1.5 Sei X ein (nichtleerer) wegzshgder top. Raum. Dann ist der Inklusionsfunktor $\underline{\pi_1(X, x_0)} \longrightarrow \Pi(X)$ eine Äquiv. von Kategorien. $\square$

VI.2 Der Satz von Seifert-van Kampen

Sei $\underline{\text{Groupoid}}$ die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen. Wir haben Funktoren

$$\underline{(\ )} : \underline{\text{Group}} \longrightarrow \underline{\text{Groupoid}},$$
$$\Pi : \underline{\text{Top}} \longrightarrow \underline{\text{Groupoid}}$$

Satz VI.21 (Seifert-van Kampen-Brown) Sei X ein top. Raum und $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X, sodass $U \cap V \in \mathcal{O}$ für alle $U, V \in \mathcal{O}$. Betrachte $\mathcal{O}$ als kleine Kategorie mit Inklusionen als Morphismen. Dann definiert die Einschränkung von Π auf $\mathcal{O}$ ein Diagramm $\Pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \underline{\text{Groupoid}}$ und es gilt $\Pi(X) = \operatorname{colim} \Pi|_{\mathcal{O}}$.

Notiz. Mit der Notation „$\operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} U$" für „$\operatorname{colim}(\mathcal{O} \hookrightarrow \underline{\text{Top}})$" und „$\operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U)$" für „$\operatorname{colim} \Pi|_{\mathcal{O}}$" besagt der Satz

$$\Pi\left(\operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} U\right) = \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U),$$

also eine „Kostetigkeitseigenschaft" des Funktors Π.

Bew. (des Satzes) Offensichtlich definieren die Inklusionen $\Pi(U) \to \Pi(X)$ einen Kokegel $\iota : \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\Pi(X)}$. z.z.: für jeden weiteren Kokegel $\eta : \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\mathcal{G}}$ gibt es einen eindeutigen Funktor $F : \Pi(X) \to \mathcal{G}$, sodass $\eta_U = F \circ \iota_U$ für alle $U \in \mathcal{O}$.

$$\begin{tikzcd} \Pi(U) \arrow[r, "\iota_U"] \arrow[dr, "\eta_U"'] & \Pi(X) \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Für $x \in X$ wähle $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und setze $F(x) = \eta_U(x)$.
Wohldefiniert: für $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V$ gilt $U \cap V \in \mathcal{O}$ und

$$\begin{tikzcd} \Pi(U) \arrow[dr, "\eta_U"'] & \Pi(U \cap V) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{U\cap V}"] & \Pi(V) \arrow[dl, "\eta_V"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd},$$

also $\eta_V(x) = \eta_{U\cap V}(x) = \eta_U(x)$. Sei nun $[\gamma] \in \mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x,y)$. Um $F([\gamma]) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(F(x), F(y))$ zu definieren, wähle ein Lebesgue-δ für die offene Überdeckung $\{\gamma^{-1}(U)\}_{U\in\mathcal{O}}$ des Kompaktums I. Wir zerteilen I in n Intervalle der Länge $< \delta$ und finden so eine Konkatenation

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$$

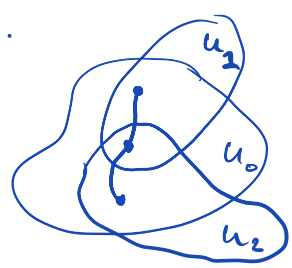
mit $\mathrm{Bild}(\gamma_i) \subseteq U_i$ für ein $U_i \in \mathcal{O}$. Wir setzen

$$F([\gamma]) = \eta_{U_n}([\gamma_n]) \circ \cdots \circ \eta_{U_1}([\gamma_1]).$$

z.z.: $F([\gamma])$ ist unabhängig von

(i) der Unterteilung $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ und der Wahl von $U_1, \dots, U_n$,

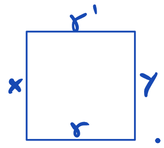
(ii) der Wahl des Vertreters γ von $[\gamma]$.



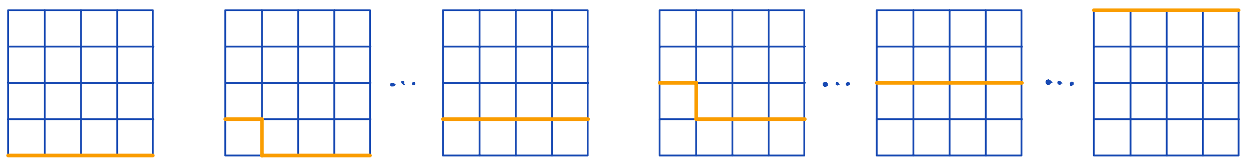
<u>Zu (i)</u>. Wir zeigen $F([\gamma])$ bleibt gleich nach Verfeinerung der Unterteilung und Änderung der U_i. Sei dazu $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq U_0$ und $\mathrm{Bild}(\gamma_i) \subseteq U_i$, $i = 1, 2$. Dann gilt

$$\eta_{U_2}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_1}([\gamma_1]) = \eta_{U_2\cap U_0}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_1 \cap U_0}([\gamma_1]) =$$
$$= \eta_{U_0}([\gamma_2]) \circ \eta_{U_0}([\gamma_1]) = \eta_{U_0}([\gamma_2] \circ [\gamma_1]) = \eta_{U_0}([\gamma_1\gamma_2])$$
$$= \eta_{U_0}([\gamma]).$$

<u>Zu (ii).</u> Betrachte $\gamma \simeq^{H}_{\{0,1\}} \gamma'$ mit $H: I \times I \to X$:



. Wähle ein Lebesgue-δ für $\{H^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{O}}$ und unterteile $I \times I$ in Quadrate mit Diameter $< \delta$. Erhalten Folge relativ homotoper Pfade:



Zwei aufeinander folgende Pfade haben die Form $\gamma_A \gamma_1 \gamma_E$ und $\gamma_A \gamma_2 \gamma_E$ mit $\gamma_1 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_2$ in einer Menge $U \in \mathcal{O}$. Es folgt

$$F([\gamma_A \gamma_1 \gamma_E]) = \cdots \circ \eta_U([\gamma_1]) \circ \cdots = \cdots \circ \eta_U([\gamma_2]) \circ \cdots = F([\gamma_A \gamma_2 \gamma_E]).$$

Nach Konstruktion faktorisiert F den Kokegel η über ℓ und ist eindeutig durch η bestimmt. $\square$

<u>Satz VI.22</u> (Seifert-van Kampen-Gruppenversion) Sei X ein nichtleerer top. Raum, $x_0 \in X$, und $\mathcal{O}$ eine Überdeckung durch offene wegzshgde Mengen, sd. $x_0 \in U$ für alle $U \in \mathcal{O}$ und $U \cap V \in \mathcal{O}$ für alle $U, V \in \mathcal{O}$. Betrachte $\mathcal{O}$ als kleine Kategorie mit punktierten Inklusionen als Morphismen. Dann definiert die Einschränkung von π_1 auf $\mathcal{O}$ ein Diagramm $\pi_1|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \underline{\text{Group}}$ und es gilt $\pi_1(X, x_0) = \operatorname{colim} \pi_1|_{\mathcal{O}}$.

Alternativ: $\pi_1\left(\operatorname{colim}_{(U,x_0)\in\mathcal{O}} (U,x_0)\right) \cong \operatorname{colim}_{(U,x_0)\in\mathcal{O}} \pi_1(U,x_0)$.

<u>Bew.</u> Die Inklusionen definieren den Kokegel $i: \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\pi_1(X,x_0)}$

z.z.: i ist universell. Offensichtlich ist X wegzshgd, also ist $I: \underline{\pi_1(X,x_0)} \to \Pi(X)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Wir beweisen nur den Fall $|\mathcal{O}|<\infty$. Dann wählen wir für jedes $y\in X$ einen Pfad $\gamma_y: x_0\to y$ innerhalb von $\left(\bigcap_{U\ni y} U\right)\in\mathcal{O}$ und $\gamma_{x_0}=c_{x_0}$. Wir erhalten das Inverse von I als

$$R([\gamma: y\to z]) = [x_0 \xrightarrow{\gamma_y} y \xrightarrow{\gamma} z \xrightarrow{\gamma_z^{-1}} x_0]$$

und genauso $R_U: \Pi(U) \to \underline{\pi_1(U,x_0)}$ für alle $U\in\mathcal{O}$, s.d.

$$\begin{tikzcd} \Pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d] & \underline{\pi_1(U,x_0)} \arrow[d] \\ \Pi(V) \arrow[r, "R_V"] & \underline{\pi_1(V,x_0)} \end{tikzcd}$$

für $U\subseteq V$ kommutiert, d.h. $R: \Pi|_{\mathcal{O}} \to \underline{\pi_1|_{\mathcal{O}}}$ ist nat. Trafo.

Sei nun $\eta: \underline{\pi_1}|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_G$ ein beliebiger Kokegel. Dieser induziert die Kokegel

$$\eta: \underline{\pi_1|_{\mathcal{O}}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\underline{G}}, \qquad \eta\circ R: \Pi|_{\mathcal{O}} \to 1^{\mathcal{O}}_{\underline{G}}.$$

Nach der Gruppoidversion des Satzes erhalten wir einen eindeutigen Funktor $F: \Pi(X) \to \underline{G}$ mit

$$\eta_U\circ R_U = F\circ \iota_U: \quad \begin{tikzcd} \Pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \underline{\pi_1(U,x_0)} \arrow[r, "\eta_U"] & \underline{G} \\ \Pi(X) \arrow[urr, bend right, "F"'] & & \end{tikzcd}$$

Wir ergänzen das Diagramm zu

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U,x_0) \arrow[r, "I_U"] \arrow[d, "i_U"] & \pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \pi_1(U,x_0) \arrow[r, "\eta_U"] & G \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "I"] & \pi(X) \arrow[urr, "F"] & &
\end{tikzcd}
$$

Sei nun $f: \pi_1(X,x_0) \to G$ der Gruppenhom. mit $f = F \circ I$. Weil $R_U \circ I_U = \mathrm{id}_{\pi_1(U,x_0)}$, gilt $\eta_U = f \circ i_U$ für alle $U \in \mathcal{O}$ wie gewünscht. Eindeutigkeit: Aus dem Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\pi(U) \arrow[r, "R_U"] \arrow[d, "\iota_U"] & \pi_1(U,x_0) \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "i_U"] & G \\
\pi(X) \arrow[r, "R"] & \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}
$$

erhalten wir $g \circ R = F$, weil $g \circ R$ den Kokegel $\eta \circ R$ über ι faktorisiert und diese Faktorisierung eindeutig durch F gegeben ist. Vorschalten von I liefert $g = F \circ I = f$, also $g = f$. $\square$

VI.3 Beispielberechnungen von Fundamentalgruppen

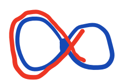
Wir betrachten den einfachsten (nichttrivialen) Fall des Satzes: $\mathcal{O} = \{U_1, U_2, U_1 \cap U_2\}$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Dann folgt

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d] \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_0).
\end{tikzcd}
$$

Bsp. · Sei $X = S^n$ mit $n \geq 2$. Wähle $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$,
$U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$, $U_2 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$.
Dann gilt

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \{1\} \arrow[d] \\
\{1\} \arrow[r] & \pi_1(S^n, x_0)
\end{tikzcd},$$

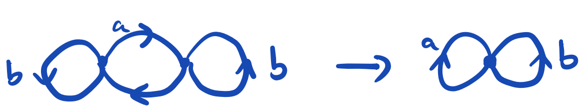
d.h. $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ (als Quotient von $\{1\} * \{1\} = \{1\}$).
Beachte: für $n = 1$ ist $U_1 \cap U_2$ unzshgd!

· $X = S^1 \vee S^1$ $\quad U_1 =$  $\quad U_2 =$ ,
$U_1 \cap U_2 = X \simeq \bullet$

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_1(S^1 \vee S^1, \bullet)
\end{tikzcd},$$

also $\pi_1(S^1 \vee S^1, \bullet) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$.

Induktion: $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{n} S^1, \bullet) \cong F_n$.

Beachte: 

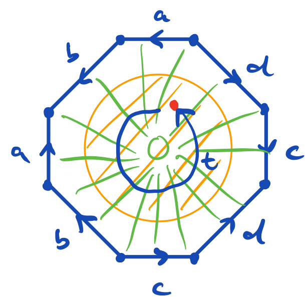
ist zweiblättrige Überlagerung. Somit

$$\begin{array}{ccc} \langle b, a^2, aba^{-1} \rangle & \leq & F(\{a, b\}) \\ \cong & & \cong \\ F_3 & \leq & F_2 \end{array}$$

und $[F_2 : F_3] = 2$.

Allgemeiner: Sei $[F_n : H] = e$. Dann ist die Überlagerung X_H von $X = \bigvee_{i=1}^{n} S^1$ ein Graph mit e Ecken und $e \cdot n$ Kanten. Kollabieren eines „Spannbaums" zeigt $H \cong F_m$ mit $m = e\cdot n - (e-1) = e(n-1)+1$ (Nielsen-Schreier-Formel).

- $X = \Sigma_g$



$U_1 \simeq \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$

$U_2 \simeq \cdot$

x_0, $U_1 \cap U_2 \simeq S^1$

$$\begin{tikzcd}
\langle t \rangle \arrow[r, "t \mapsto \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle \arrow[d] \\
\{1\} \arrow[r] & \pi_1(\Sigma_g, \cdot)
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\pi_1(\Sigma_g, \cdot) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

für die Flächengruppe vom Geschlecht g. Genauso:

$$\pi_1(N_g, \cdot) = \langle a_1, \dots, a_g \mid a_1^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Beachte: $\pi_1(\Sigma_g, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$,

$$\pi_1(N_g, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^g / \langle k\cdot(2, \dots, 2)^T : k \in \mathbb{Z} \rangle \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

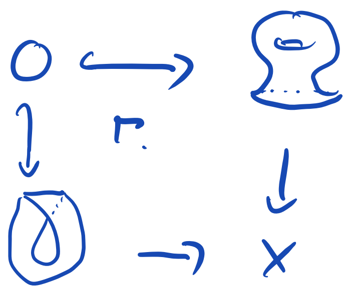
Diese abelschen Gruppen sind paarweise nicht isomorph.

$\rightsquigarrow$ Beweis des Klassifikationssatzes für Flächen vollständig (s. Kap. II). $\square$

$\rightsquigarrow$ Homöomorphieklassifizierung stimmt mit Homotopieklassifizierung überein. $\square$

$\rightsquigarrow$ Beachte: Es gibt kompakte zshgde 3-Mfktn M und N mit $M \simeq N$, aber $M \not\cong N$ ($\to$ Linsenräume).

- Sei X der Raum, der durch Ankleben eines Möbiusbandes an einen Torus mit herausgenommener offener Kreisscheibe entsteht



$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & T^2 \setminus D^2 \arrow[d] \\ M \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Seien U_1 und U_2 die um einen "Kragen" aufgedickten Umgebungen von M und $T^2 \setminus D^2$ in X. Dann ergibt sich

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_1 \cap U_2, \cdot) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(U_1, \cdot) \arrow[d] \\ \pi_1(U_2, \cdot) \arrow[r] & \pi_1(X, \cdot) \end{tikzcd} \quad \text{zu} \quad \begin{tikzcd} \langle t \rangle \arrow[r, "t \mapsto aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[d, "t \mapsto s^2"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \langle a, b \rangle \arrow[d] \\ \langle s \rangle \arrow[r] & \langle a, b, s \mid aba^{-1}b^{-1}s^{-2} \rangle . \end{tikzcd}$$

Weil $\pi_1(X, \cdot)_{ab} \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, folgt $X \cong N_3$.

VI.4 Kofaserungen

Def VI.4.1 Eine stetige Abb. $i: A \to X$ hat die Homotopie-erweiterungseigenschaft (HEE) für einen Raum Y, falls

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times \mathrm{id}_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists H'"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

In Worten: Für jede Homotopie $H: A \times I \to Y$ und jede Anfangsbedingung $f: X \to Y$ mit $f(i(a)) = H(a,0)$ für alle $a \in A$ gibt es eine Erweiterung $H': X \times I \to Y$, sodass $H'(x,0) = f(x)$ für alle $x \in X$ und $H'(i(a),t) = H(a,t)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$.

Wir fordern also nur die Existenz, nicht die Eindeutigkeit von H'.

Def VI.4.2 Eine stetige Abb. $i: A \to X$ heißt Kofaserung, falls sie die HEE für alle Räume Y hat.

Bemerkung.

HEE:
$$
\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, dashed] \\
Y^I \arrow[u, "ev_0"] & A \arrow[l, "H"] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Dual:
$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0^Y"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}
$$

HHE: Homotopie-hochhebungseigenschaft

Eine Abbildung $p: E \to B$ mit HHE für alle Y heißt Faserung. Wichtigstes Beispiel: Faserbündel.

Wollen zeigen: Hat $i: A \to X$ die HEE für den eigenen Abbildungszylinder M_i, so ist i eine Kofaserung.
Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"'] \arrow[ddr, bend left, "i \times \mathrm{id}"] & \\ X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "i_0^X"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "s"] & \\ & & X \times I \end{tikzcd}$$

Ist i eine Teilrauminklusion, so ist s stetige Bijektion auf das Bild $X \times \{0\} \cup A \times I$.
Ist i sogar die Inklusion eines abgeschlossenen Teilraums, so ist s ein Homöomorphismus auf das Bild, also ebenfalls eine Teilrauminklusion.
Mit Teil (iii) folgender Proposition ist dies auch wahr, wenn i eine Kofaserung ist.

<u>Prop. VI.4.3</u> Sei $i: A \to X$ stetig. Dann sind äquivalent:
(i) i ist eine Kofaserung.
(ii) i hat die HEE für M_i.
(iii) Es gibt eine Retraktion $r: X \times I \to M_i$, d.h. $r \circ s = \mathrm{id}_{M_i}$.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): Trivial. (ii) $\Rightarrow$ (iii): Die HEE für M_i liefert

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[ddr, bend left, "\bar{i}"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & M_i .
\end{tikzcd}$$

Die definierenden Diagramme von r und s vereinen sich zu

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "i \times id"] \arrow[dddrr, bend left=40, "\bar{i}"] & & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "i_0^X"'] \arrow[ddrrr, bend right=40, "j"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "s"] & & \\
& & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & & M_i .
\end{tikzcd}$$

Es folgt $r \circ s = id_{M_i}$ laut Eindeutigkeitsaussage in der univ. Eig. des Pushouts.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei ein Homotopieerweiterungsproblem $H: A \times I \to Y$, $f: X \to Y$, $f \circ i = H \circ i_0^A$ gegeben. Erhalte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "\bar{i}"'] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & M_i \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
& & Y .
\end{tikzcd}$$

Anschluss an das definierende Diagramm von r gibt

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A\times I \arrow[d, "i\times id"] \arrow[ddr, "\bar{i}"] \arrow[dddrr, bend left, "H"] & & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "j"] \arrow[ddrrr, bend right, "f"'] & X\times I \arrow[dr, dashed, "r"] & & \\
& & M_i \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
& & & Y
\end{tikzcd}$$

,

also ist $g\circ r$ eine Erweiterung von H mit Anf.bed. f. $\square$

<u>Satz VI.4.4</u> Eine Kofaserung $i: A \to X$ ist eine Teilrauminklusion. Ist X Hausdorffsch, so ist $A \subseteq X$ abgeschlossen.

<u>Bew.</u> Sei $i_1^X: X \to X\times I$, $x \mapsto (x,1)$. Für die Endabbildung $\bar{i}_1: A \to M_i$ der Homotopie $\bar{i}: A\times I \to M_i$ gilt $\bar{i}_1(a) = \bar{i}(a,1) = r(i(a),1) = r\circ i_1^X \circ i(a)$ für $a\in A$. (*)

<u>Beh.</u>: $\bar{i}_1$ ist eine Teilrauminklusion.

<u>Bew.</u> $\bar{i}_1$ ist stetige Bijektion auf das Bild.

z.z.: Ist $B \subseteq A$ abgeschlossen, so auch $\bar{i}_1(B) \subseteq M_i$.

Nach Konstruktion von M_i ist $j \sqcup \bar{i}: X \sqcup A\times I \to M_i$ eine Identifizierung und $(j\sqcup \bar{i})^{-1}(\bar{i}_1(B)) = B\times\{1\}$ ist abg. in $X \sqcup A\times I$, also $\bar{i}_1(B) \subseteq M_i$ abg. $\square$

Anwenden von $\left(\bar{i}_1|_{Bild(\bar{i}_1)}\right)^{-1}$ auf (*) zeigt, dass $\left(\bar{i}_1|_{Bild(\bar{i}_1)}\right)^{-1}\circ r\circ i_1^X$ linksinvers zu $i: A\to X$ ist, also ist i ein Homöomorphismus auf das Bild.

Für den zweiten Teil des Satzes zeigt Anwenden von s auf $(*)$, dass die Abbildungen $s \circ r \circ i_1^X$ und i_1^X auf $i(A)$ übereinstimmen. Gilt umgekehrt für $x \in X$, dass $s \circ r \circ i_1^X(x) = i_1^X(x)$, folgt $(x, 1) \in \mathrm{Bild}(s)$. Weil die zweite Koordinate 1 ist, folgt $(x, 1) \in \mathrm{Bild}(s \circ \bar{i}) = \mathrm{Bild}(i \times \mathrm{id})$, also $x \in i(A)$.
Somit ist

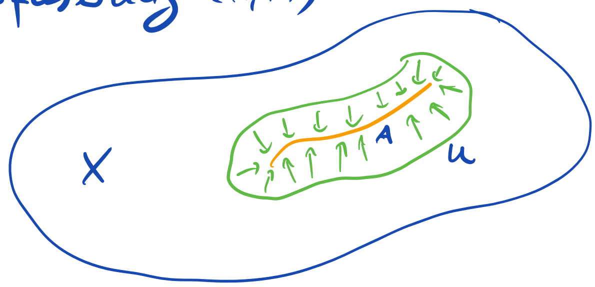
$$A \xrightarrow{i} X \underset{i_1^X}{\overset{s \circ r \circ i_1^X}{\rightrightarrows}} X \times I$$

ein Differenzkern (engl. Equalizer, vgl. Blatt 13, Aufg. 1) und daher $i(A) \subseteq X$ abgeschlossen, wenn X Hausdorffsch ist (Blatt 3, Aufg. 2). $\square$

Fortan sehen wir also Kofaserungen als Raumpaare (X, A) an und können in der Regel $A \subseteq X$ abg. annehmen.

<u>Satz VI.4.5</u> Sei (X, A) ein Raumpaar. Dann sind äquivalent:
(i) Das Paar (X, A) ist eine abgeschlossene Kofaserung.
(ii) Es gibt eine Retraktion $R : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ und $A \subseteq X$ abg.
(iii) Es gibt eine Abb. $u : X \to I$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$, sd.
(1) $u^{-1}(0) = A$,
(2) $H(x, 0) = x$ für alle $x \in X$,
(3) $H(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in I$,
(4) $H(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$ mit $u(x) < 1$.

Laut (iii) ist also $A = u^{-1}(0)$ starker Deformationsretrakt der offenen Umgebung $U := u^{-1}([0,1))$. Daher nennen wir eine abg. Kofaserung (X, A) auch ein NDR-Paar (englisch neighborhood deformation retract).



<u>**Bew.**</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). HEE:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A \times I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists R"] & \\
 & & X \times \{0\} \cup A \times I
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $H: A \times I \to Y$, $f: X \to Y$, $H(a,0) = f(a)$ ein Homotopieerweiterungsproblem. Schon gesehen: $A \subseteq X$ abg. zeigt $s: M_i \xrightarrow{\cong} X \times \{0\} \cup A \times I$, also haben wir das Pushout links. Dann löst $H' = F \circ R$ das HEP.

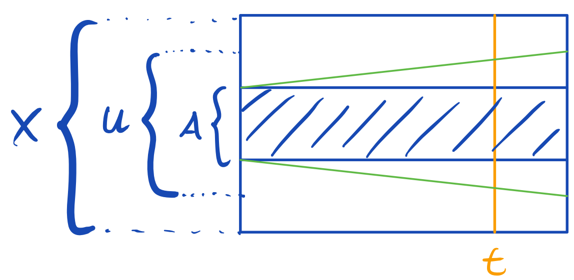
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \times I \arrow[d, "i \times id"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[dr, dashed, "\exists! F"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Definiere $H: X \times I \to X$ durch $H = pr_X \circ R$.
(2) ✓ (3) ✓. Definiere $u: X \to I$ durch
$u(x) := \max_{t \in I} |t - pr_I(R(x,t))|$. Dann gilt $A \subseteq u^{-1}(0)$.
Ist umgekehrt $u(x) = 0$, gilt $pr_X(R(x,(0,1])) \subseteq A$.
Weil A abg., folgt $pr_X(R(x,0)) \in A$, also $u^{-1}(0) \subseteq A$.

(1) ✓. Sei nun $u(x) < 1$. Dann gilt insbesondere $|1 - pr_I(R(x,1))| < 1$, also $R(x,1) = (a,t)$ für ein $a \in A$ und ein $t \in I$. Damit $H(x,1) = pr_X(R(x,1)) = a \in A$, d.h. (4) ✓. Die Stetigkeit von u folgt elementar.

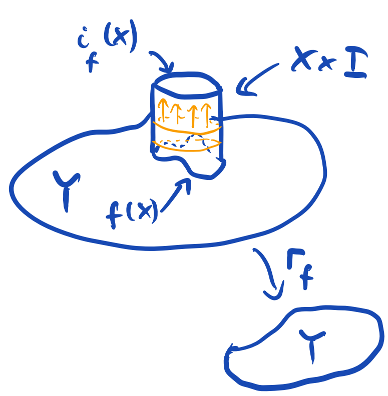
(iii) ⟹ (ii). Wir definieren $R: X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$,

$$R(x,t) = \begin{cases} \left(H\left(x, \frac{t}{u(x)}\right), 0\right) & \text{für } u(x) > t \\ (H(x,1), t - u(x)) & \phantom{\text{für }} u(x) \leq t. \end{cases}$$



Die Stetigkeit ist wieder elementar. □

<u>Bsp.</u> Für $f: X \to Y$ ist die Inklusion $i_f: X \to M_f$ eine abg. Kofaserung, d.h. in <u>Top</u> faktorisiert jeder Pfeil als Komposition $f = r_f \circ i_f$ einer Kofaserung und einer Homotopieäquivalenz (dual: einer H.äquiv. und einer Faserung → Modellkategorien)



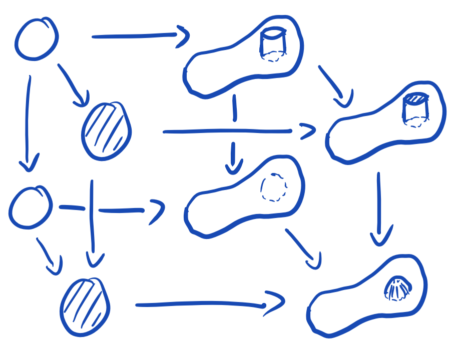
Insbesondere ist für jeden Raum X das Paar (CX, X) ein NDR, denn $X \subseteq CX$ ist die Inklusion $i_f : X \hookrightarrow CX$ für $f : X \to \bullet$. Für $X = S^{n-1}$ folgt, dass (D^n, S^{n-1}) ein NDR-Paar ist.

Satz VI.4.6 Sei $i : A \to X$ eine Kofaserung und $f : A \to Y$ mit Zerlegung
$$\begin{tikzcd} & M_f \arrow[dr, "r_f"] & \\ A \arrow[ur, "i_f"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}.$$
Betrachte die zwei Pushouts

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\bar{f}"] & Z \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M_f \arrow[d, "j_f"] \\ X \arrow[r, "\bar{i_f}"] & \bar{Z} \end{tikzcd}.$$

Dann gibt es eine eindeutige Homotopieäquivalenz $c : \bar{Z} \xrightarrow{\simeq} Z$, sd.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "id_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\ & X \arrow[rr, "\bar{i_f}"] \arrow[dd, "id_X"] & & \bar{Z} \arrow[dd, dashed, "c"] \\ A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[dr, "j"] & \\ & X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z \end{tikzcd}$$



kommutiert.

Bew. Wir erhalten c wie rechts aus dem oberen Pushout. Noch z.z.: c ist eine Homotopieäquivalenz, d.h. finde ein Homotopieinverses d.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "id_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{i}_f"] \arrow[dd, "id_X"] & & \bar{Z} \arrow[dd, dashed, "\exists!\, c"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[dr, "j"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z
\end{tikzcd}$$

Idee: so wie rechts. Problem: die Abbildungen $\bar{i}_f$ und $j_f \circ j_0$ formen keinen Kokegel auf $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{f} Y$.
Aber: $j_f \circ j_0 \circ f \simeq_{H'} \bar{i}_f \circ i$, wobei
$H' = j_f \circ H \circ (i_f \times id_I)$ mit $j_0 \circ r_f \simeq_H id_{M_f}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "id_A"'] & & M_f \arrow[dr, "j_f"] \arrow[dd, "r_f"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{i}_f"] \arrow[dd, "id_X"] & & \bar{Z} \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[dr, "j"] \arrow[uu, bend left, "j_0"] & \\
& X \arrow[rr, "\bar{f}"] & & Z \arrow[uu, dashed, "\exists!\, d"']
\end{tikzcd}$$

Nach der HEE für i setzt sich H'_{1-t} mit Anfangsbedingung $\bar{i}_f$ zu $H'': X \times I \to \bar{Z}$ fort.
Sei $e = H''_1$. Dann gilt $e \circ i = H'(0) = j_f \circ j_0 \circ f$.
Damit induziert der Kokegel aus e und $j_f \circ j_0$ die Abbildung $d: Z \to \bar{Z}$. Nach der Prop. in I.5 finden wir die Homotopien $c \circ d \simeq id_Z$ und $d \circ c \simeq id_{\bar{Z}}$ in den Pushout-Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \times I \arrow[d, "j \times id"] \arrow[ddr, bend left, "j \circ pr_Y"] & \\
X \times I \arrow[r, "\bar{f} \times id"] \arrow[drr, bend right, "c \circ H''_{1-t}"'] & Z \times I \arrow[dr, dashed] & \\
& & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "i_f \times id"] \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M_f \times I \arrow[d, "j_f \times id"] \arrow[ddr, bend left, "j_f \circ H"] & \\
X \times I \arrow[r, "\bar{i}_f \times id"] \arrow[drr, bend right, "H''_{1-t}"'] & \bar{Z} \times I \arrow[dr, dashed] & \\
& & \bar{Z}
\end{tikzcd}$$

$\square$

Für zwei Abbildungen $X \xleftarrow{f_2} A \xrightarrow{f_1} Y$ hat das Pushout von $X \xleftarrow{f_2} A \xrightarrow{i_{f_1}} M_{f_1}$ die symmetrische Beschreibung

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "\bar{f}_2(a,1-t)"] \arrow[d, "\bar{f}_1(a,t)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & M_{f_2} \arrow[d] \\
M_{f_1} \arrow[r] & M_{f_1,f_2}
\end{tikzcd}$$

und M_{f_1,f_2} heißt doppelter Abbildungszylinder von f_1 und f_2. Ist

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Y \arrow[d, "g_1"] \\
X \arrow[r, "g_2"] & Z
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

homotopiekommutativ, d.h. $g_1 \circ f_1 \simeq_H g_2 \circ f_2$, induzieren g_1 und $H(a,t)$ die Abb. $c_1 : M_{f_1} \to Z$, und g_2 und $H(a,1-t)$ die Abb. $c_2 : M_{f_2} \to Z$. Schließlich stiften c_1 und c_2 die Vergleichsabb. $c : M_{f_1,f_2} \to Z$. Ist c eine Homotopieäquivalenz, heißt das Quadrat $(*)$ homotopiekokartesisch und der Kokegel $X \xrightarrow{g_2} Z \xleftarrow{g_1} Y$ heißt Homotopie-Pushout.

Bsp. Laut letztem Satz ist ein kokartesisches Quadrat

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_1"] \\
X \arrow[r, "g_2"] & Z
\end{tikzcd}$$

in Top homotopiekokartesisch, wenn f_1 (oder f_2) eine Kofaserung ist, denn c ist die Vergleichsabb. zur konstanten Homotopie $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

VI.5 Fundamentalgruppen von Anheftungen

Satz VI.5.1 (Seifert-van Kampen - Pushoutversion)

Sei
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "g_2"] \\ X \arrow[r, "g_1"] & Z \end{tikzcd}$$
ein Pushout wegzshgder Räume und $a_0 \in A$. Setze $x_0 = f_1(a_0)$, $y_0 = f_2(a_0)$ und $z_0 = g_1(f_1(a_0))$.

Ist f_1 oder f_2 eine Kofaserung, so ist

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A, a_0) \arrow[r, "\pi_1(f_2)"] \arrow[d, "\pi_1(f_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\pi_1(g_2)"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\pi_1(g_1)"] & \pi_1(Z, z_0) \end{tikzcd}$$

ein Pushout von Gruppen.

Bew. Setze $\mathring{M}_{f_j} := M_{f_j} \setminus \mathrm{Bild}(i_{f_j})$ für $j = 1, 2$.

Dann ist $\mathcal{O} = \{\mathring{M}_{f_1}, \mathring{M}_{f_2}, A \times (0,1)\}$ offene Überdeckung von M_{f_1, f_2}. Alle vertikalen Pfeile in

$$\begin{tikzcd} A \times (0,1) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathring{M}_{f_2} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & \mathring{M}_{f_1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_{f_1,f_2} \arrow[dd] \\ A \times I \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "pr_A"'] & & M_{f_2} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & M_{f_1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & M_{f_1,f_2} \arrow[dd] \\ A \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dr] & \\ & X \arrow[rr] & & Z \end{tikzcd}$$

sind Homotopieäquivalenzen. Anwenden von π_1 führt den Beweis auf die Gruppenversion zurück.

$\square$

Bsp. •
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bullet \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X/A \end{tikzcd}$$

Ist i eine Kofaserung, folgt $\pi_1(X/A, A/A) \cong \pi_1(X)/\langle\langle \mathrm{Bild}\,\pi_1(i) \rangle\rangle$.

•
$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, "j"] \\ D^n \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Satz VI.5.2 (i) $n \geq 3$: $\pi_1(j): \pi_1(Y,\cdot) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Z,\cdot)$,

(ii) $n = 2$: $\overline{\pi_1(j)}: \pi_1(Y,\cdot)/\langle\langle [f] \rangle\rangle \xrightarrow{\cong} \pi_1(Z,\cdot)$.

•
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bigvee_{i=1}^{2g} S^1 \arrow[d] \\ D^2 \arrow[r] & \Sigma_g \end{tikzcd}$$

$$\pi_1(\Sigma_g, \cdot) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

Umgekehrt: Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ und

$$\begin{tikzcd} \bigvee_{r \in R} S^1 \arrow[r, "\amalg r"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \bigvee_{s \in S} S^1 \arrow[d] \\ \bigvee_{r \in R} D^2 \arrow[r] & X_G \end{tikzcd}$$

$\pi_1(X_G, \cdot) \cong G$

X_G heißt Präsentationskomplex und ist ein 2-dim. Zellkomplex (engl. CW complex).