Klopsch

§ 6 Lineare Darstellungen, Sätze von Burnside bzw Schur zu linearen Torsionsgruppen

(6.1) Def Sei G eine Gruppe, und sei V ein Vektorraum über einem Körper K.
Ein Homomorphismus $\rho : G \to GL(V)$ heißt eine lineare Darstellung von G über K.
Wir beschränken uns durchweg auf den Fall $\dim_K V < \infty$, und $n = \dim_K V$ heißt der Grad von ρ. Ist $\mathrm{Kern}(\rho) = 1$, so heißt die Darstellung ρ treu.
Besitzt G eine treue Darstellung über K (von endl Grad), so heißt G linear über K.
Zu einer Darstellung $\rho : G \to GL(V)$, $\dim_K V = n$, und einer Basiswahl $(v_1, \ldots, v_n)$ gehört dann eine induzierte Matrixdarstellung

$$\rho^* : G \to GL_n(K), \quad g \mapsto (g\rho^*_{ij})_{ij},$$

wobei

$$v_i g^\rho = \sum_{j=1}^{n} (g\rho^*_{ij}) . v_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

gilt.

Klopsch

Bsple (1) Für $V \cong K^1$, dh $\dim_K V = 1$,

heißt $G \to GL(V) \cong GL_1(K) \cong K^*$

$g \mapsto id$ [entspr (1) bzw 1]

„die" triviale Darstellung von G über K.

(2) Sei Ω eine endl Menge und

$\pi : G \to Sym(\Omega)$ ein Homom (eine „Permutationsdarstellung" vom Grad $|\Omega|$).

Sei V ein $|\Omega|$-dimul K-Vektraum mit Basis $(v_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Dann induziert π eine lin Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ mittels der Vorgabe $v_\alpha \cdot g^\rho = v_{\alpha . g^\pi}$, $\alpha \in \Omega$.

In der zugeh Matrixdarstellung bzgl $(v_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ sind die Bilder der $g \in G$ jeweils Permutationsmatrizen.

Insbesondere ist jede endl Gruppe linear, und (endl erz) lineare Gruppen bilden eine geeignete Erweiterung der Klasse aller endl Gruppen.

(6.2) Def Sei G eine Gruppe und K ein Körper.

Die Gruppenalgebra KG ist eine K-Algebra (dh ein K-Vektorraum mit Klopsch

der zusätzlichen Struktur eines Ringes mit 1)

und K.1 zentral

mit K-Basis $(g)_{g\in G}$

[dh jedes Element von KG läßt sich eind schreiben als

$\sum_{g\in G} a_g \cdot g$, wobei $a_g \in K$ und zusätzlich $a_g = 0$ für alle bis auf endl viele $g \in G$ gilt]

und den Verknüpfungen

$$\Big(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\Big) + \Big(\sum_{g\in G} b_g \cdot g\Big) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g$$

$$\Big(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\Big)\Big(\sum_{h\in G} b_h \cdot h\Big) = \sum_{g\in G} \Big(\sum_{h\in G} a_{gh^{-1}} b_h\Big)\, g .$$ 24

25

Insbesondere ist $\dim_K KG = |G|$, und KG ist komm gdw G abelsch ist.

Bspl: (1) Für $G = \langle x \rangle \cong C_n$ ist

$$KG \cong K[X]/(X^n - 1) .$$

(2) Für $G = \langle x \rangle \cong C_\infty$ ist $KG \cong K[X, X^{-1}]$.

(6.3) Anwendung Sei $\rho: G \to GL(V)$ eine lin Darst einer Gruppe G über einem Körper K mit $n = \dim_K(V) < \infty$.

Dann setzt sich ρ offenbar fort
zu einem K-Algebrenhomom

$$KG \to \mathrm{End}_K(V), \quad \sum_g a_g g \mapsto \sum_g a_g (g^\rho).$$

Auf diese Weise wird V zu einem
KG-Rechtsmodul.

[<u>Erinnerung</u>: Ist R ein Ring mit 1, so heißt $M = (M, +, \cdot)$ mit $+ : M \times M \to M$, $\cdot : M \times R \to M$ ein R-Rechtsmodul, sofern

$(M, +)$ eine abelsche Gruppe ist und

die Rechenregeln

$$v(ab) = (va)b, \quad v \cdot 1 = v, \quad v(a+b) = va + vb,$$
$$(v+w)a = va + wa \quad \text{für } v, w \in M, \; a, b \in R \text{ gelten.}]$$

Umgekehrt liefert jeder KG-Rechtsmodul W zunächst per Einschränkung der Skalarmultipl. einen K-Vektraum W, und für $n = \dim_K W < \infty$ wegen $G \leq (KG)^*$ per Einschränkung eine zugeh. lin. Darst. $G \to GL(W)$ vom Grad n.

Man verwendet oft parallel <u>beide</u> Sichtweisen.

Im folgenden schreiben wir statt Rechtsmodul meist nur Modul.

(6.4) <u>Def</u> Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Zwei lineare Darstellungen ρ, σ der Gruppe G über K heißen <u>äquivalent</u> (über K), falls die zugehörigen KG-Moduln isomorph sind. Insbesondere haben äquivalente Darstellungen den gleichen Grad.

Konkret bedeutet das: Sind ρ, σ von gleichem Grad n und $\rho^*, \sigma^*: G \to GL_n(K)$ die induzierten Matrixdarstellungen (bzgl. gewisser Basen), so gilt:

ρ und σ sind äquivalent genau dann, wenn es ein $A \in GL_n(K)$ gibt mit

$$\forall g \in G: \quad A^{-1}(g\rho^*)A = g\sigma^*.$$

[Multiplikation mit A liefert dann einen K-linearen Isom $\alpha: K^n \to K^n$, der mit den Wirkungen von G mittels ρ^* bzw σ^* verträglich ist.]

(6.5) <u>Def</u> Sei G eine Gruppe und $\rho: G \to GL(V)$ eine lin Darstellung über K mit $n = \dim_K(V) < \infty$. Dann heißt ρ <u>irreduzibel</u> (oder <u>unzerlegbar</u>) über K, falls der zugeh KG-Modul V einfach ist, d.h. $V \neq \{0\}$ außer $\{0\}$ und V keine weiteren KG-Untermoduln besitzt.

Die Darstellung ρ ist eine <u>direkte</u> Klopsch

<u>Summe</u> $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_r$ von Darstellungen

$\rho_i : G \to GL(V_i)$, $1 \le i \le r$, falls $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$

die direkte Summe von KG-Untermoduln

ist und für $g \in G$ und $1 \le i \le r$ jeweils

$$g\rho_i = g\rho|_{V_i} \quad \text{gilt.}$$

Die Darstellung ρ heißt <u>vollständig reduzibel</u>

(oder <u>vollst. zerlegbar</u>), falls ρ die direkte

Summe von irred. Darstellungen ist.

(6.6) <u>Satz</u> (Maschke)

Sei G eine <u>endl.</u> Gruppe, und sei K ein

Körper mit $\operatorname{char}(K) \nmid |G|$. [zB $\operatorname{char} K = 0$]

Dann ist jede lin. Darstellung von G über K

vollst. zerlegbar.

<u>Bew</u>: Sei M ein KG-Modul mit $\dim_K M < \infty$.

Wir verwenden Induktion nach $\dim_K M$.

Ist M einfach oder $M = \{0\}$, so ist M ganz

offenbar die direkte Summe von einfachen

Untermoduln. Sei nun $\{0\} \neq N \lneqq M$ ein

„echter" KG-Untermodul. Es genügt, zz:

$M = N \oplus L$ für einen KG-Untermodul

$L \le M$.

Wegen $\dim_K N, \dim_K L < \dim_K M$ Klopsch

sind N, L per Induktion dann jeweils direkte Summen von einfachen KG-Untermoduln.

Wir finden zunächst einmal einen K-Untermodul $L_0 \le M$, der N komplementiert:

$$M = N \oplus L_0 \quad \text{als } K\text{-Moduln.}$$

Die zugehörige Projektion $\pi_0 : M \to N$ entlang L_0 ist K-linear (aber i.a. nicht KG-linear).

Betrachte die K-lineare Abb.

$$\pi : M \to N, \quad a\pi = \frac{1}{|G|} \underbrace{\sum_{x \in G}}_{\text{endl. Summe}} \underbrace{\underbrace{(ax)\pi_0}_{\in N} \cdot x^{-1}}_{\in N}.$$

Für $a \in M$ und $g \in G$ gilt:

$$(ag)\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (agx)\pi_0 \cdot (gx)^{-1} g$$

$$= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} (ay)\pi_0 \cdot y^{-1} \right) \cdot g = (a\pi)\, g.$$

Daher ist $\pi : M \to N$ ein KG-Modulhomom.

Weiter gilt für $a \in N$:

$$a\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \underbrace{(ax)}_{\in N} \pi_0 \cdot x^{-1} \underset{\pi_0|_N = \mathrm{id}_N}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} a \underbrace{x x^{-1}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot |G| \cdot a = a;$$

d.h.: π ist die Projektion auf N entlang des KG-Untermoduls $L = \mathrm{Ker}(\pi) \le M$.

Klopsch

Somit gilt $M = N \oplus L$ wie gewünscht. //

Bsp: Für $p \in \mathbb{P}$ sei

$$G = \langle g \rangle \cong C_p \quad \text{und} \quad \rho : G \to GL_2(\mathbb{F}_p),$$
$$g^i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^i.$$

Dann besitzt der $\mathbb{F}_p G$-Modul $V = \mathbb{F}_p^2$ genau drei $\mathbb{F}_p G$-Untermoduln:

$\{0\}$, $\{(0,x) \mid x \in \mathbb{F}_p\}$ und V.

Insbesondere ist ρ nicht vollst. zerlegbar.

25
26

(6.7) Lemma

Sei R ein Ring mit 1 und L ein vollst. zerlegbarer R-Modul, also $L = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ für einfache R-Untermoduln M_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Dann ex zu jedem R-Untermodul $N \leq L$ ein $\Lambda' \subseteq \Lambda$ dergestalt, daß

$$L = N \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} M_\lambda \Big) \quad \text{gilt.}$$

[„Jeder R-Untermodul besitzt ein R-Modul-Komplement in L."]

Bew: Wende (3.27) für $\Omega = R$, $G = L$ etc an. //

(6.8) Satz (Schursches Lemma)

Sei R ein Ring mit 1, und seien M, N einfache R-Moduln. Ist $M \not\cong N$, so gibt es außer der Nullabb keine R-Homom von M nach N, dh $\mathrm{Hom}_R(M,N) = 0$.

Ist $M \cong N$, so ist jeder R-Homom von M nach N, der nicht die Nullabb ist, bereits ein R-Isomorphismus. Insbesondere ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_R(M)$ ein Divisionsring.

Bew: Sei $\alpha: M \to N$ ein R-Homom. Dann ist $\mathrm{Kern}(\alpha) \leq M$ ein R-Untermodul, da M einfach ist, also $\mathrm{Kern}(\alpha) = 0$ (und α inj) oder $\mathrm{Kern}(\alpha) = M$ (und α die Nullabb). Ähnlich ist entweder $\mathrm{Bild}(\alpha) = 0$ (und α die Nullabb) oder $\mathrm{Bild}(\alpha) = N$ (und α surj auf N).
Ist α nicht die Nullabb, so folgt, daß $\alpha: M \to N$ bereits ein R-Isom ist. //

(6.9) „Korollar"

Sei K ein alg abgeschl Körper (zB $K = \mathbb{C}$) und A eine K-Algebra (zB eine Gruppenalg $A = KG$). Sei M ein einfacher A-Modul mit $\dim_K M < \infty$.

Dann gilt

$$\mathrm{End}_A(M) = \{\mu_e \mid e \in K\} \cong K,$$

wobei $\mu_e : M \to M$, $x \mapsto x \cdot e$ die zu $e \in K$ gehörige Homothetie bezeichnet.

<u>Bew</u>: Sei $\alpha \in \mathrm{End}_A(M)$. Dann ist α ein K-lin Endomorphismus des endl dim K-Vektorraums M. Da K alg abgeschl ist, finden wir einen Eigenvektor $y \in M \setminus \{0\}$ für α zu einem Eigenwert $e \in K$: $y\alpha = y \cdot e$.

Offenbar ist $N = \{x \in M \mid x\alpha = x \cdot e\}$ ein A-Untermodul von M: für $x \in N$ und $a \in A$ gilt $(xa)\alpha = (x\alpha)a = (x \cdot e)a \underset{\substack{\uparrow \\ e \in K \subseteq Z(A)}}{=} (xa)e$.

Da M ein einfacher A-Modul und wegen $y \in N$ zudem $N \neq \{0\}$ ist, folgt $M = N$. Das ergibt $\alpha = \mu_e$. //

<u>Bem</u>: Gemäß (6.8) ist $\mathrm{End}_A(M)$ ein Divisionsring über $\{\mu_e \mid e \in K\} \cong K$. Wegen $\dim_K M < \infty$ ist auch $\mathrm{End}_A(M)$ endl dimal über K. Aber K, da nach Voraussetzung alg abgeschl, besitzt keine echten endl dimal Körpererweiterungen. Daher ist „$K(\alpha) = K$".

(6.10) Korollar

Sei G eine abelsche Gruppe und K ein alg abgeschl Körper. Die irred Darstellungen von G über K sind genau die Darstellungen vom Grad 1.

Bew: Sei M ein einfacher KG-Modul mit $\dim_K M < \infty$. Nach (6.9) ist $\mathrm{End}_{KG}(M) \cong K$.
Für $g \in G$ ist $M \to M$, $x \mapsto xg$ ein KG-Homom, denn G ist abelsch; folglich ex $e(g) \in K$ mit $xg = x.e(g)$ für alle $x \in M$.
Damit ist jeder 1-dimle K-Untervektorraum von M bereits ein KG-Untermodul. Da M einfach ist, folgt $\dim_K M = 1$.
Offensichtlich ist umgekehrt jeder KG-Modul N mit $\dim_K N = 1$ einfach. //

(6.11) Satz (Jacobsonscher Dichte-Satz)
Sei R ein Ring mit 1 und M ein einfacher R-Modul. Sei

$$S = \mathrm{End}_R(M) = \{ \varphi : M \to M \mid \forall a_1, a_2 \in M\ \forall r \in R : (a_1 + a_2 r)\varphi = (a_1\varphi) + (a_2\varphi) r \},$$

und betrachte M auch als S-Modul.
Merke: $R \to \mathrm{End}_S(M)$, $r \mapsto \alpha_r$ mit $\alpha_r : M \to M$, $a \mapsto ar$ ist ein Ringhomom.

Klopsch

Seien $\alpha \in \mathrm{End}_S(M)$ und

$\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq M$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Dann ex $r \in R$, so daß

$\forall i \in \{1, \ldots, m\}: \quad a_i \alpha = a_i r = a_i \alpha_r$.

Bew: Betrachte den R-Modul

$L = \underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{m \text{ Summanden}}$ und

$\alpha^* = \alpha \oplus \ldots \oplus \alpha : L \to L, \quad (x_1, \ldots, x_m)\alpha^* = (x_1\alpha, \ldots, x_m\alpha)$.

Setze $T = \mathrm{End}_R(L)$. Wir zeigen zunächst:

(*) $\quad \alpha^* \in \mathrm{End}_T(L)$.

dazu: Sei $\tau \in T$, und def $\tau_{1j}: M \to M$ über

$(x_1, 0, \ldots, 0)\tau = (x_1\tau_{11}, x_1\tau_{12}, \ldots, x_1\tau_{1m})$

für $x_1 \in M$. Wegen $\tau \in \mathrm{End}_R(L)$ gilt dann $\tau_{1j} \in \mathrm{End}_R(M) = S$. Aus $\alpha \in \mathrm{End}_S(M)$ folgt für $x_1 \in M$ daher

$$(x_1, 0, \ldots, 0)\tau\alpha^* = (x_1\tau_{11}\alpha, \ldots, x_1\tau_{1m}\alpha)$$
$$= (x_1\alpha\tau_{11}, \ldots, x_1\alpha\tau_{1m}) = (x_1, 0, \ldots, 0)\alpha^*\tau.$$

Klopsch

Ähnlich gilt

$$(0, x_2, 0, \dots, 0)\,\tau\alpha^* = (0, x_2, 0, \dots, 0)\,\alpha^*\tau \quad \text{usw.}$$

Folglich erhalten wir $\tau\alpha^* = \alpha^*\tau$; daher gilt (*). /

Definitionsgemäß ist L ein vollständig zerlegbarer R-Modul. Das Element $a = (a_1, \dots, a_m) \in L$ erzeugt den R-Untermodul

$$aR = \{ ar \mid r \in R \} \leq L.$$

Gemäß (6.7) ist $L = aR \oplus N$ für einen R-Untermodul N. Sei $\pi : L \to aR$ die Projektion entlang N; insb ist ~~xxxxx~~ $\pi \in T$. Weiter ist wegen $a = a \cdot 1 \in aR$ dann $a\pi = a$. Mit (*) erhalten wir somit

$$a\alpha^* = (a\pi)\alpha^* = (a\alpha^*)\pi \in aR.$$

Das ergibt

$$(a_1\alpha, \dots, a_m\alpha) = a\alpha^* = ar = (a_1 r, \dots, a_m r)$$

für geeignetes $r \in R$. //

26/27

(6.12) Satz (Burnside)

Sei $\rho : G \to \cancel{GL_n(K)}\ GL(V) \cong$ eine irred lin Darstellung einer Gruppe G vom Grad n über einem

Klopsch

alg. abgeschl. Körper K. Bezeichne mit M den zugehörigen einfachen KG-Modul, $\dim_K M = n$.

Dann wird der K-Vektorraum $\mathrm{End}_K(M) \cong \mathrm{Mat}_n(K)$ von $\mathrm{Bild}(\rho) = \{ g^\rho \mid g \in G \}$ erzeugt, d.h. die von ρ induzierte Abb. $KG \to \mathrm{End}_K(M)$ ist surjektiv. Äquivalent: $\{ g^\rho \mid g \in G \}$ enthält n^2 K-lin. unabh. Elemente.

Bew: Setze $R = KG$. Nach Schurs Lemma, genauer (6.9), ist

$$S = \mathrm{End}_R(M) = \{ e.\mathrm{id}_M \mid e \in K \} \cong K.$$

Folglich gilt $\mathrm{End}_S(M) = \mathrm{End}_K(M)$. Da $\dim_K(M) < \infty$ ist, folgern wir aus Jacobsons Dichte-Satz (6.11):
Jedes Element von $\mathrm{End}_K(M)$ ergibt sich durch Rechtsmultipl. mit einem geeigneten Element aus KG. Also erzeugt $\{ g^\rho \mid g \in G \}$ den K-Vektorraum $\mathrm{End}_K(M)$. //

(6.13) Def: Eine Untergruppe $G \leq GL_n(K)$, für $n \in \mathbb{N}$ und einen Körper K, heißt irreduzibel, vollständig reduzibel usw., falls die der

Inklusionsabb zugeh Darstellung

$G \hookrightarrow GL_n(K) \cong GL(K^n)$ die entsprechende

Eigenschaft hat.

(6.14) <u>Hilfssatz</u> Sei K ein alg abgeschl Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $G \leq GL_n(K)$ eine irred Untergruppe. Weiter sei $m = \# \{ \text{Spur}(g) \mid g \in G \} < \infty$.

Dann ist G endlich; genauer gilt $|G| \leq m^{n^2}$.

<u>Bew</u>: Gemäß (6.12) enthält G Elemente $g_1, \ldots, g_{n^2}$, die über K linear unabh sind.

Für $g \in G$ bezeichne $g(k,l) \in K$ für $1 \leq k,l \leq n$ den (k,l)-Eintrag von $g \in \text{Mat}_n(K)$.

Mit $a_i = \text{Spur}(g_i g)$, $1 \leq i \leq n^2$, erhalten wir Gleichungen

$$(+) \qquad \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{g_i(k,l)}_{\in K \text{ fix}} \, g(l,k) = \underbrace{a_i}_{\substack{\in \{\text{Spur}(h) \mid h \in G\} \\ \text{endl}}} , \quad 1 \leq i \leq n^2 .$$

Diese bilden ein lin Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen für die „Unbekannten" $g(l,k)$, $1 \leq k,l \leq n$.

Klopsch

Die Zeilen der Koeff.matrix entsprechen gerade den Elementen $g_1, \dots, g_{n^2}$ und sind daher lin. unabh. über K. Somit ist g eindeutig durch $(\dagger)$ bestimmt. Für die Parameter $a_1, \dots, a_{n^2}$ gibt es nach Voraussetzung höchstens m^{n^2} Wahlmöglichkeiten. Folglich gilt $|G| \leq m^{n^2}$. //

(6.15) <u>Def.</u> Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.
Ein Elmt $g \in GL_n(K)$ heißt <u>unipotent</u>, falls $(g - \mathrm{Id})^n = 0$ ist.

<u>Bem</u>: Ein Elmt $g \in GL_n(K)$ ist unipotent gdw $\mathrm{Charpol}_K(g) = (X-1)^n$ ist, d.h. alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms gleich 1 sind.
[Übung: OE ist K ein Zerfällungskörper für $\mathrm{Charpol}_K(g)$ und g in Jordanscher Normalform.]

<u>Bem</u>: Jede obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen gleich 1 ist unipotent.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6.16) <u>Satz</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

Sei $G \leq GL_n(K)$ dergestalt, daß jedes Element von G unipotent ist. [Man sagt dann, G sei unipotent.]

Dann ist G in $GL_n(K)$ konjugiert zu einer Untergruppe der Gruppe

$$UT_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; * \right\} \leq GL_n(K)$$

aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen gleich 1. [„uni-triangular"]

<u>Bew</u>: Die Gruppe G operiert in natürlicher Weise auf $V = K^n$. Es genügt offenbar, eine aufsteigende Kette $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_m = V$ ($m \leq n$) von KG-Untermoduln von V zu finden, so daß G auf jedem Quotienten V_i/V_{i-1}, $1 \leq i \leq m$, trivial operiert. Indem wir dann entsprechende K-Basen für die V_i ineinander schachteln, erhalten wir eine K-Basis bzgl. derer die Elemente von G die Gestalt

$$\begin{array}{r c} & \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Id}} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\mathrm{Id}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\mathrm{Id}} \end{pmatrix} \\ \dim V_2 \\ \dim V_1 & \underbrace{}_{\dim V_2} \; \underbrace{}_{\dim V_1} \end{array}$$

haben.

Klopsch

Sei zunächst K alg abgeschl. Per Induktion nach $\dim_K V$ dürfen wir $G \leq GL(V)$ als irred voraussetzen. Nach Voraussetzung hat jedes Elmt von G die Spur $1+\ldots+1 = \dim_K V = n$. Daher impliziert (6.14): $|G|=1$, dh $G=1$, und es ist nichts weiter zu zeigen.

Sei nun K beliebig, und bezeichne mit $\overline{K}$ den alg Abschluß von K. Setze $\overline{V} = \overline{K} \otimes_K V \, (\cong \overline{K}^n)$ und betrachte $\overline{V}$ als $\overline{K}G$-Modul. Wie gesehen ex eine aufsteigende Kette

$$0 = \overline{V}_0 \lneqq \overline{V}_1 \lneqq \ldots \lneqq \overline{V}_m = \overline{V},$$

so daß $\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}$, $1 \leq i \leq m$, jeweils einen trivialen $\overline{K}G$-Modul darstellt. Über die Einbettung $V \to \overline{V}$, $v \mapsto 1 \otimes v$ können wir V als KG-Untermodul von $\overline{V}$ betrachten, und $V_i = V \cap \overline{V}_i$, $1 \leq i \leq m$, liefern eine Kette $0 = V_0 \leq \ldots \leq V_m = V$, die nach Streichen von wiederholt auftauchenden Gliedern die gewünschten Eigenschaften hat. //

Klopsch

(6.17) <u>Satz</u> (Burnside) 1905

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jede Untergruppe $G \leq GL_n(K)$ von endl. Exponenten bereits endl.

[Erinnerung: Eine Gruppe G hat endl. Exponenten $e \in \mathbb{N}$ falls

$$e = \inf \underbrace{\{ k \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g^k = 1 \}}_{\neq \emptyset} < \infty .]$$

<u>Bew</u>: Offenbar dürfen wir K als alg. abgeschl. voraussetzen. Sei zunächst $G \leq GL_n(K)$ auch irred, und G habe Exponenten $e < \infty$. Für $g \in G$ gilt dann $g^e = 1$, also sind die Wurzeln des char. Polynoms von g allesamt e-te Einheitswurzeln in K. Daher nimmt $\mathrm{Spur}(g)$ einen von max. e^n Werten an.

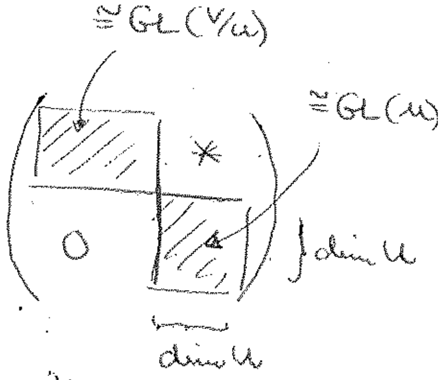
Gemäß (6.14) ist G endl. (sogar $|G| \leq e^{n^3}$)

Sei nun $G \leq GL_n(K)$ reduzibel und von endl. Exponenten. Dann besitzt der KG-Modul $V = K^n$ einen Untermodul $\{0\} \lneqq U \lneqq V$. Die Wirkung von G auf V/U und U liefert einen Homomorphismus

$$\varphi : G \to GL(V/U) \times GL(U).$$

Klopsch

Wegen $\dim_K(V/U), \dim_K(U) < \dim_K(V)$
dürfen wir per Induktion schließen, daß
$|\mathrm{Bild}(\varphi)| < \infty$, also $|G : \mathrm{Kern}(\varphi)| < \infty$ ist.
Aber konstruktionsgemäß ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$
isomorph zu einer Untergruppe von
$UT_n(K)$. Letztere ist torsionsfrei,
weil $\mathrm{char}(K) = 0$ ist.
Daher gilt $\mathrm{Kern}(\varphi) = 1$ und
G ist endlich. ↯ (sogar $|G| \leq c^{n^3}$)



(6.18) <u>Satz</u> (Schur)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $G \leq GL_n(\mathbb{Q})$ eine Torsionsgruppe.
Dann ist G endl.

<u>Bew</u>: Gemäß (6.17) genügt es, z.z., daß G
endl. Exponenten hat. Sei $g \in G$ und
$m = \mathrm{ord}(g)$, also $H = \langle g \rangle \cong C_m$. Wir leiten
eine obere Schranke für m her, die nur von n
abhängt. Per Induktion nach n dürfen wir
H als irreduzibel voraussetzen. Schreibe $V = \mathbb{Q}^n$
für den natürlichen $\mathbb{Q}H$-Modul. Gemäß
Schurs Lemma (6.8) ist $\mathrm{End}_H(V)$ ein
Divisionsring. Als $\mathbb{Q}$-Algebra ist das Zentrum

von $\mathrm{End}_H(V)$ dann eine endl

Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}$. Weiter ist $g \in K$

und $\mathrm{Minpol}_{\mathbb{Q}}(g) = \Phi_m$, das m-te

Kreisteilungspolynom. Letzteres ist (irred und)

vom Grad $\varphi(m)$, wobei φ die Eulersche

φ-Fkt bezeichnet. [siehe Algebra-Vorl]

Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so sind $v, vg, \ldots, vg^{\varphi(m)-1}$

$\mathbb{Q}$-lin unabh; ansonsten besäße g ein

Minimalpolynom vom Grad kleiner als $\varphi(m)$.

Somit gilt $\varphi(m) \leq \dim_{\mathbb{Q}} V = n$. Offenbar

ist m damit durch einen Wert $f(n)$

beschränkt, der nur von n abhängt.

[Übung: m besitzt nur Primteiler $\leq n+1$

und deren Exponenten in einer Faktorisierung

von m sind jeweils beschränkt.]

<u>Bem:</u>

1) <u>Allgemeines Burnside-Problem</u> (1902):

Ist jede endl erz Torsionsgruppe endl?

Antw: Nein (Golod, Shafarevich 1964, ...).

2) <u>Spezielleres Burnside-Problem</u> (1902):

Ist jede endl erz Gruppe von endl Exp endl?

⇝ freie Burnsidegruppen $B(n,e) = F_n / F_n^{\,e}$

(↑ F_n: freie Gruppe vom Rang e)

Kloppsch

Welche $B(n,e)$ sind endl?

zB Novikov, Adjan (1968):

$B(n,e)$ unendl für $n \geq 2$ und ungerade $e \geq 665$

3) Eingeschränktes Burnside-Problem (~1930s)

Ist jede endl erz residuell-endl Gruppe von endl Exponenten endl?

Antw: Ja! (Kostrikin ~1950s, Zelmanov 1991/2)

Hall-Higman 1956