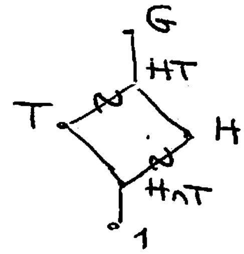
(5.12) Korollar Sei G eine endl erz abelsche Gruppe und $H \leq G$. Dann ist H ebenfalls eine endl erz abelsche Gruppe.

Bew Nach (5.11) gilt $G = T \times F$, wobei $|T| < \infty$ und F eine freie abelsche Gruppe von endl Rang sind.



Dann ist

$$H/_{H \cap T} \cong HT/_T \leq G/_T \cong F \quad \text{nach (5.7)}$$

eine freie abelsche Gruppe von endl Rang.

Nach (5.10) ist

$$H \cong \underbrace{(H/_{H\cap T})}_{\text{endl erz}} \times \underbrace{(H \cap T)}_{\text{endl}} \quad \text{dann endl erz.} \quad //$$

Bem: Nachdem wir die Struktur endl abelscher Gruppen geklärt haben, wird sogar gelten: Die min Anzahl von Erzeugern für $H \leq G$ ist kleiner oder gleich der entspr Anzahl für G.

(5.13) Satz (Klassif endl ab Gruppen)

Sei A eine endl ab Gruppe der Ordnung $|A| = n$ mit Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_i}, \quad \text{also insb } m \in \mathbb{N}_0,$$

$p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}$ p.w. versch. und Klopsch

$\nu_1, \dots, \nu_m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$A = A_1 \times \dots \times A_m, \qquad (\dagger)$$

wobei, für $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$A_i = \{a \in A \mid a \text{ hat } p_i\text{-Potenz-Ordnung}\}$$
$$= \{a \in A \mid \operatorname{ord}(a) \mid p_i^{\nu_i}\}$$

die eindeutig bestimmte Sylow-p_i-Untergruppe von A der Ordnung $|A_i| = p_i^{\nu_i}$ ist.

Weiter gibt es zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ eine Partition $(\nu_{i,1} \geq \dots \geq \nu_{i,r(i)})$ der Länge $r(i)$ von ν_i

[dh $\nu_{i,1} \geq \dots \geq \nu_{i,r(i)} \in \mathbb{N}$ mit $\nu_i = \sum_{j=1}^{r(i)} \nu_{ij}$]

und Elemente $x_{i,1}, \dots, x_{i,r(i)} \in A_i$ der Ordnung $p_i^{\nu_{i,1}}, \dots, p_i^{\nu_{i,r(i)}}$, so daß

$$A_i = \langle x_{i,1} \rangle \times \dots \times \langle x_{i,r(i)} \rangle \qquad (\dagger\dagger)$$
$$\cong C_{p_i^{\nu_{i,1}}} \times \dots \times C_{p_i^{\nu_{i,r(i)}}}$$

gilt.

Also ist A isomorph zu einem

direkten Produkt von zykl Gruppen.

Weiterhin sind die Daten

$$p_i \quad \text{und} \quad (\nu_{i,1}, \dots, \nu_{i,r(i)}) \quad , \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

eindeutig durch A bestimmt und parametrisieren die Isomorphieklasse der endl ab Gruppe A.

<u>Zusatz</u>: Mit Hilfe des Chinesischen Restesatzes ergibt sich eine weitere Darstellung der endl ab Gruppe A als Produkt

$$A = \langle y_1 \rangle \times \dots \times \langle y_r \rangle \cong C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$$

mit $r = \max\{ r(i) \mid 1 \leq i \leq m\}$,

$$n_j = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_{ij}} \quad \text{für } j \in \{1, \dots, r\},$$

wobei $\nu_{ij} = 0$ für $j > r(i)$ gesetzt sei,

$$y_j = x_{1,j} \cdot \dots \cdot x_{m,j} \quad \text{für } j \in \{1, \dots, r\},$$

wobei $x_{i,j} = 1$ für $j > r(i)$ gesetzt sei.

Die Daten $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ erfüllen

$$n = n_1 \cdot \dots \cdot n_r \quad \text{und} \quad 1 < n_r \mid n_{r-1} \mid \dots \mid n_1 ;$$

sie parametrisieren ebenfalls die Isom klasse von A.

Bew: Per Induktion nach m läßt Klopsch sich die erste Behauptung (+) auf die folgende Aussage zurückführen:

- Ist $n = k \cdot \ell$ mit $ggT(k,\ell) = 1$, so gilt

  $A = B \times C$ für

  $B = \{a \in A \mid ord(a) \mid k\}$, $C = \{a \in A \mid ord(a) \mid \ell\} \leq A$,

  und $|B| = k$, $|C| = \ell$.

denn: Da A abelsch ist, sind B, C wie angegeben Untergruppen von A, und wegen $ggT(k,\ell) = 1$ gilt zudem $B \cap C = 1$.

Somit gilt $B \times C \leq A$.

Sei nun $a \in A$. Wähle (Bézout-Koeff) $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $kx + \ell y = ggT(k,\ell) = 1$. Dann gilt:

$$b = a^{\ell} \in B, \quad c = a^{k} \in C \quad \text{und}$$

$$a = a^{kx+\ell y} = b^{y} c^{x} \in B \times C.$$

Das ergibt $A = B \times C$, und daher $|A| = |B||C|$.

Also gilt $|B| \mid |A| = n = k\ell$. Nun ist $ggT(|B|, \ell) = 1$, denn wegen $ggT(k,\ell) = 1$ kann B per Definition kein Element der Ordnung $p \in \mathbb{P}$ für $p \mid \ell$ enthalten. Also gilt $|B| \mid k$ und ähnlich $|C| \mid \ell$.

Klopsch

Das ergibt insgesamt $|B| = k$, $|C| = \ell$.

[Alternativ kann man direkt über die Sylowschen Sätze argumentieren: Jede Sylow-Untergruppe von A ist normal und damit die einzige ihrer Ordnung. Per Induktion erhält man die direkte Produktzerl.]

Damit ist (+) bewiesen. Um die Notation zu vereinfachen, dürfen wir nun $A = A_1 \neq 1$, $n = p_1^{\nu_1}$ annehmen und $p = p_1$, $\nu = \nu_1$ schreiben.

Die endl Gruppe A besitzt sicherlich eine treue Darstellung als Matrizengruppe über $\mathbb{C}$, dh, es gibt einen Isom von A auf eine Untergruppe von $GL_N(\mathbb{C})$ für geeign $N \in \mathbb{N}$.

ZB liefert die Rechtsmultipl von Elementen $a \in A$ auf A (vgl (0.2.1) Bsp) eine Einbettung $A \hookrightarrow \mathrm{Sym}(A)$, und wir erhalten über Permutationsmatrizen [die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag 1 und sonst Einträge 0 haben] eine zu A isomorphe Gruppe in $GL_n(\mathbb{C})$.

Sei also oE $A \leq GL_N(\mathbb{C})$. Da jedes $a \in A$ endl Ordnung hat, ist die entsprechende

Jordan-Normalform zu a jeweils eine Diagonalmatrix (alle Jordan-Blöcke haben die Größe 1×1).

[Übung:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \ddots\end{pmatrix}^k = \left(\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda^{-1} & \\ & 1 & \lambda^{-1} \\ & & \ddots\end{pmatrix}\right)^k$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots\end{pmatrix}^k \begin{pmatrix}1 & \lambda^{-1} & \\ & 1 & \lambda^{-1} \\ & & \ddots\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}\lambda^k & & \\ & \lambda^k & \\ & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\lambda^{-1} & * \\ & 1 & k\lambda^{-1} \\ & & \ddots\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & * & \cdots \\ 0 & \lambda^k & & \\ & & & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$]

23

Da A abelsch ist, können wir die endl vielen 24
Elmte von A sogar simultan diagonalisieren.
Wegen $\mathrm{ord}(a) \mid n = p^\nu$ für $a \in A$ sind die Eigenwerte zudem durchweg p^νte Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

Setze
$$p^\mu = \max\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in A\} \quad \text{und}$$
$$z = e^{2\pi i / p^\mu}.$$

Dann gilt

$$A \xhookrightarrow{\eta} \underbrace{\langle z\rangle \times \ldots \times \langle z\rangle}_{N \text{ Faktoren}} \cong \underbrace{C_{p^\mu} \times \ldots \times C_{p^\mu}}_{N \text{ Faktoren}},$$

und σE ist die Hintereinanderausführung

$\eta\pi : A \to \langle z \rangle$

mit der Projektion π auf die erste Koord surjektiv. Wähle $x_1 \in A$ mit $x_1 \eta \pi = z$.
Dann gilt $\operatorname{ord}(x_1) = p^{\mu}$ und

$$A = \langle x_1 \rangle \times \operatorname{Kern}(\eta\pi).$$

Schreibe $\nu_1 = \mu \geq 1$. Ist $\operatorname{Kern}(\eta\pi) \neq 1$, so finden wir per Induktion $x_2, x_3, \ldots, x_r$ der Ordnung $p^{\nu_2}, \ldots, p^{\nu_r}$ mit $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_r \geq 1$, so daß gilt:

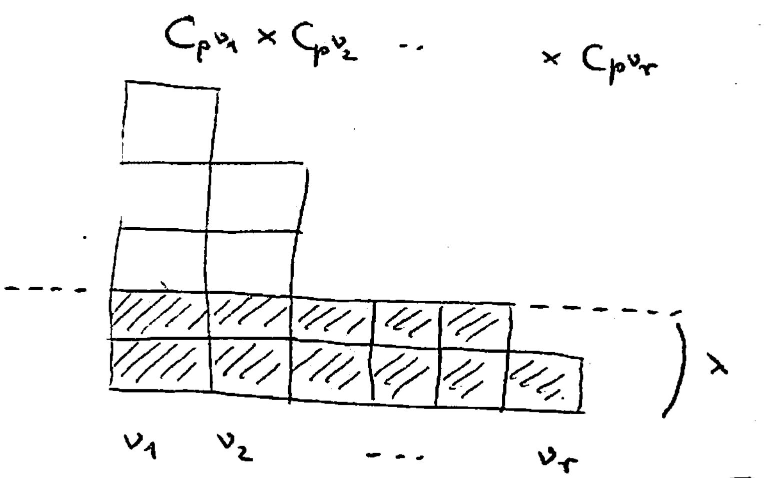
$$A = \langle x_1 \rangle \times \ldots \times \langle x_r \rangle \cong C_{p^{\nu_1}} \times \ldots \times C_{p^{\nu_r}}$$

wie in (#).

Es bleibt zz, daß die Partition $(\nu_1 \overset{\geq}{,} \ldots \overset{\geq}{,} \nu_r)$ von $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ eindeutig durch A bestimmt ist.

Dann beobachten wir, daß für jedes $\lambda \in \{0, 1, .., \nu\}$ gilt:

$$\#\{a \in A \mid a^{p^{\lambda}} = 1\}$$
$$= \prod_{i=1}^{r} p^{\min\{\nu_i, \lambda\}}$$
$$= p^{\sum_{i=1}^{r} \min\{\nu_i, \lambda\}}$$



Dh A bestimmt eindeutig die Werte

$$\omega_j = \log_p \#\{a\in A \mid a^{p^j}=1\} - \log_p \#\{a\in A \mid a^{p^{j-1}}=1\}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \min\{\nu_i, j\} - \sum_{i=1}^{r} \min\{\nu_i, j-1\}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\min\{\nu_i, j\} - \min\{\nu_i, j-1\}}_{=1 \text{ falls } \nu_i \geq j,\ =0 \text{ sonst}}$$

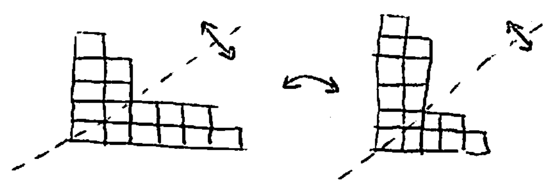
$$= \#\{i \mid 1 \leq i \leq r,\ \nu_i \geq j\} \qquad \text{für } j \geq 1.$$

Merke: $(\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_s)$ mit $s = \nu_1$ ist ebenfalls eine Partition von $\nu = \omega_1 + \dots + \omega_s$, die sogenannte duale Partition zu $(\nu_1, \dots, \nu_r)$. Erneutes Dualisieren liefert

$$\nu_i = \#\{j \mid 1 \leq j \leq s,\ \omega_j \geq i\} \qquad \text{für } 1 \leq i \leq r.$$

Also bestimmt A tatsächlich $(\nu_1, \dots, \nu_r)$.

Den Zusatz lassen wir als (leichte) Übungsaufgabe. //



Bspl: $(C_2 \times C_2 \times C_4) \times (C_3 \times C_3) \times (C_{25} \times C_{125})$

$$\cong C_2 \times (C_2 \times C_3 \times C_{25}) \times (C_4 \times C_3 \times C_{125})$$

$$\cong C_2 \times C_{150} \times C_{1500}$$

Klopsch

(5.14) <u>Korollar und Def</u>

Eine abelsche Gruppe G ist genau dann endl erzeugt, wenn sie das direkte Produkt von endl vielen zykl Untergruppen unendlicher oder Primzahlpotenz-Ordnung ist. Ist $T(G)$ die Torsionsgruppe von G, so sind [vgl (5.11)] in solch einer Darstellung

$$G \cong \underbrace{C_\infty \times \dots \times C_\infty}_{r_\infty(G)} \times \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid |T(G)|}} \underbrace{C_{p^{\nu_1(p)}} \times \dots \times C_{p^{\nu_{r(p)}(p)}}}_{r(p) = r_p(G)} \qquad (*)$$

mit $\nu_1(p), \dots, \nu_{r(p)}(p) \geq 1$ die Parameter $r_\infty(G)$ und $r_p(G)$, $p \mid |T(G)|$, eindeutig durch den Isomorphietyp von G bestimmt. Sie heißen <u>torsionsfreier bzw p-Rang</u> von G.

Zusätzlich setzt man $r_p(G) = 0$ für $p \nmid |T(G)|$

<u>Bew</u>: Wende (5.11) und (5.13) an. //

<u>Bem</u>: Die minimale Anzahl von Erzeugenden für die endl erz ab Gruppe G wie in (*) ist

$$r_\infty(G) + \max_{p \in \mathbb{P}} r_p(G).$$

[Übung!]