Klopsch

§ 5 Varietäten von Gruppen, relativ freie Gruppen und endlich erzeugte abelsche Gruppen

(5.1) Def Eine Klasse von Gruppen $\mathfrak{K}$ ist eine „Klasse" (im Gegensatz zu Menge), deren zugehörigen Elemente Gruppen sind, wobei folgende Minimalbedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathfrak{K}$ enthält eine Gruppe der Ordnung 1.

(ii) Mit $G \in \mathfrak{K}$ enthält $\mathfrak{K}$ auch jede zu G isomorphe Gruppe.

Bsple: Klasse aller endl Gruppen
freien Gruppen
abelschen Gruppen
...

Sei $F_\infty = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ eine freie Gruppe von abzählbar unendl Rang und $W \subseteq F_\infty$ eine Menge von Worten. Für jede Gruppe G bezeichne

$$W(G) = \langle w^\vartheta \mid w \in W,\ \vartheta : F_\infty \to G \text{ Homom} \rangle$$

die Untergruppe von G, die erzeugt wird von Elementen, die man erhält, indem man in Worte in W bel Elemente aus G „einsetzt".
Offenbar ist $W(G)$ dann eine voll-invariante Untergruppe von G.

$\mathfrak{V} \neq \mathfrak{W}$

Die von W vermittelte <u>Varietät</u> $\mathfrak{V} =$ Klopsch

$\mathfrak{V}(W)$ ist die Klasse aller Gruppen G,

für die $W(G) = \{1\}$ gilt. Elmte von $\mathfrak{V}$ heißen $\mathfrak{V}$-Gruppen.

Bsple: 1) Für $W = \{[x_1, x_2]\}$ ist

$\mathfrak{A} = \mathfrak{V}(W)$ die Klasse aller abelschen Gruppen.

2) Für $W = \{x_1^n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{V}(W)$

die Klasse aller Gruppen, deren Exponent

endl ist und n teilt, die sogenannte

<u>Burnside-Varietät zum Exponenten n.</u>

(5.2) <u>Lemma</u> Jede Varietät $\mathfrak{V}$ von Gruppen

ist abgeschl bzgl der Bildung von

Untergruppen, Faktorgruppen und cartesischen

Produkten:

$$\begin{cases} G \in \mathfrak{V} \ \wedge \ H \leq G & \Rightarrow \quad H \in \mathfrak{V} \\ G \in \mathfrak{V} \ \wedge \ N \trianglelefteq G & \Rightarrow \quad G/N \in \mathfrak{V} \\ (G_i)_{i \in I} \text{ in } \mathfrak{V} & \Rightarrow \quad \prod_{i \in I} G_i \in \mathfrak{V} \end{cases}$$

<u>Bew</u>: leichte Übung! ↯

[Ein bemerkenswerter Satz von Birkhoff,

Kogalovskii & Tain besagt: Eine Klasse von

Gruppen ist genau dann eine Varietät,

wenn sie unter Bildung von Faktorgruppen

und „subcartesischen" Produkten abgeschl ist.]

Klopsch

(5.3) **Def** Sei $\mathfrak{V}$ eine Gruppenvarietät, F eine $\mathfrak{V}$-Gruppe und $X \subseteq F$. Dann heißt F eine <u>$\mathfrak{V}$-freie Gruppe</u> bzgl. (der „Basismenge") X, falls es zu jeder Abb $\alpha : X \to G$ in eine bel $\mathfrak{V}$-Gruppe G stets genau einen Homom $\beta : F \to G$ mit $\beta|_X = \alpha$ gibt.

Ohne Nennung von X bezeichnen wir F auch als eine <u>freie $\mathfrak{V}$-Gruppe</u> oder eine <u>relativ freie Gruppe</u> in $\mathfrak{V}$.

Bem 1) Ist $\mathfrak{V}$ die Varietät aller Gruppen, so erhalten wir die (absolut) freien Gruppen iSv (4.1).

2) Ist $\mathfrak{V}$ die Varietät aller abelschen Gruppen, so spricht man von <u>freien abelschen Gruppen</u>.

3) In der Klasse aller endl Gruppen gibt es neben den trivialen Gruppen offenbar keine (5.3) entsprechend definierten „freie endl Gruppen". [Üb]

(5.4) **Satz** Sei $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(W)$ die von einer Wortmenge W vermittelte Gruppenvarietät. Sei X_0 eine bel Menge. Bilde gemäß (4.2) etc eine freie Gruppe $\hat{F}$ mit freiem Erzeugendensystem $\hat{X}$ derselben Mächtigkeit wie X_0; betrachte $F = \hat{F}/W(\hat{F})$ sowie das Bild

$X \subseteq F$ von $\hat{X}$ unter der kanonischen Projektion $\eta : \hat{F} \to F$, $\hat{y} \mapsto \hat{y}\, W(\hat{F})$.

Dann ist F eine $\mathfrak{W}$-freie Gruppe bzgl X.

<u>Zusatz</u>: Sei $\mathfrak{W}$ nicht die Varietät der trivialen Gruppen, dh es ex wenigstens eine Gruppe in $\mathfrak{W}$ mit mindestens 2 Elementen.

Dann vermittelt η eine Bijektion von $\hat{X}$ auf X, so daß X ebenfalls gleichmächtig zu X_0 ist.

Weiter gelten:

(i) Sind F_1, F_2 $\mathfrak{W}$-freie Gruppen bzgl X_1, X_2, so setzt sich jede Bijektion $X_1 \to X_2$ eindeutig zu einem Isom $F_1 \xrightarrow{\cong} F_2$ fort.

(ii) Ist F_1 eine $\mathfrak{W}$-freie Gruppe bzgl X_1, so ist X_1 ein Erzeugendensystem für F_1.
[Man nennt X_1 daher ein <u>freies Erzeugendensystem</u> für die $\mathfrak{W}$-freie Gruppe F_1.]

(iii) Sind F_1, F_2 $\mathfrak{W}$-freie Gruppen bzgl X_1, X_2 mit $F_1 \cong F_2$, so gilt $|X_1| = |X_2|$.
[Die Mächtigkeit eines freien Erzeugendensystems einer relativ freien Gruppe nennt man dann deren <u>Rang</u>.]

<u>Bew</u>: Seien $G \in \mathfrak{W}$ und $\alpha : X \to G$ bel vorgegeben. Da $\hat{X}$ ein freies Erzsyst von $\hat{F}$ bildet, ex zu $\hat{\alpha} = (\eta|\hat{X})\alpha : \hat{X} \to G$ genau ein Homom $\hat{\beta} : \hat{F} \to G$ mit $\hat{\beta}|\hat{X} = \hat{\alpha}$. Da $G \in \mathfrak{W}$ ist, gilt $W(G) = 1$ und daher $W(\hat{F}) \subseteq \mathrm{Kern}(\hat{\beta})$.

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[d, "\eta|\hat{X}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\hat{\alpha}"'] & \subseteq & \hat{F} \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend left=60, "\hat{\beta}"] \\
X \arrow[dr, "\alpha"'] & \subseteq & F \arrow[dl, dashed, "\exists!\beta"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Folglich induziert $\hat{\beta}$ einen Homom

$\beta : F \to G$, $\hat{y}W(\hat{F}) \mapsto \hat{y}\hat{\beta}$, so daß $\hat{\beta} = \eta\beta$.

Offenbar gilt dann für $x = \hat{x}W(\hat{F}) \in X$, mit $\hat{x} \in \hat{X}$,

$$x\beta = (\hat{x}W(\hat{F}))\beta = \hat{x}\hat{\beta} = \hat{x}\hat{\alpha} = \hat{x}\eta\alpha = x\alpha; \text{ dh } \beta|_X = \alpha.$$

Wäre $\beta' : F \to G$ ein weiterer Homom mit $\beta'|_X = \alpha$, so erhielten wir aufgrund der Surjektivität von $\eta : \hat{F} \to F$ mit $\hat{\beta}' = \eta\beta'$ neben $\hat{\beta}$ einen weiteren Homom $\hat{\beta}' : \hat{F} \to G$ mit

$$\hat{\beta}'|\hat{X} = (\eta\beta')|_{\hat{X}} = \eta|_{\hat{X}} \cdot \beta'|_X = \eta|_{\hat{X}} \cdot \alpha = (\eta\alpha)|_{\hat{X}} = \hat{\alpha}.$$

Damit ist F eine $\mathfrak{W}$-freie Gruppe bzgl X. Wir kümmern uns nun um den Zusatz.

(†) Sei $\mathfrak{W}$ nicht die Varietät, die nur aus trivialen Gruppen besteht. Klopsch

Widerspruchsann.: $\eta|_{\hat{X}} : \hat{X} \to X$ ist nicht injektiv.

Wähle $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2 \in \hat{X}$ mit $\hat{x}_1\eta = \hat{x}_2\eta$. Dann gilt $\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_2 \in \mathrm{Kern}(\eta) = W(\hat{F})$. Folglich ist $\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_2$ darstellbar als ein Produkt von „W-Worten" in $\hat{F}$. Für jedes $G \in \mathfrak{W}$ gilt $W(G)=1$ und daher $g_1^{-1}g_2 = 1$, d.h. $g_1 = g_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$. Das ergibt $G = 1$. Ⓦ

Also vermittelt η eine Bijektion von $\hat{X}$ auf X und $|X| = |\hat{X}| = |X_0|$.

(i) folgt nun ganz ähnlich wie (4.7)(1).

(ii) Gemäß (i) genügt es Gruppen $F = \hat{F}/W(\hat{F})$ zu betrachten, die aus der obigen Konstruktion hervorgehen. Aus $\hat{F} = \langle \hat{X} \rangle$ folgt dann $F = \langle X \rangle$.

(iii) Beweisskizze (vgl. Übungen):

Ist $W \subseteq [F_\infty, F_\infty]$, so argumentieren wir ganz ähnlich wie in (4.7)(2). Sei nun $W \not\subseteq [F_\infty, F_\infty]$.

Klopsch

Dann überlegt man elementar:

$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(\tilde{W})$, wobei

$\tilde{W} = \{x_1^m\} \cup \tilde{W}_0$ mit $m \in \mathbb{N}$ und

$\tilde{W}_0 \subseteq [F_\infty, F_\infty]$.

Wegen (+) ist $m \geq 2$. Wähle einen Primteiler p von m und argumentiere ähnlich wie in (4.7)(2), wobei $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zu ersetzen ist. ⌋

21/22

(5.5) <u>Korollar</u> Sei $\mathfrak{W}$ eine Gruppenvarietät und $G \in \mathfrak{W}$. Es gelte $G = \langle Y \rangle$. Ferner sei F eine $\mathfrak{W}$-freie Gruppe bzgl X und $\alpha: X \to Y$ surjektiv. Dann setzt sich α zu einem Epimorphismus $F \to G$ fort.
Folglich ist jede $\mathfrak{W}$-Gruppe das homomorphe Bild einer freien $\mathfrak{W}$-Gruppe.

<u>Bew</u>: klar. //

(5.6) <u>Satz</u> Sei G eine Gruppe und $X \subseteq G$.
Dann sind äquivalent:

(1) G ist eine freie abelsche Gruppe mit freiem Erzeugendensystem X.

(2) Es gilt $G = \coprod_{x \in X} \langle x \rangle$, wobei $\langle x \rangle \cong C_\infty$ für jedes $x \in X$.

Bew „(1) → (2)" Gemäß (5.4) Klopsch

dürfen wir ohne Einschr voraussetzen,

daß $G = F/[F,F]$ und $X = \{ y[F,F] \mid y \in Y \}$

sind für eine freie Gruppe F mit freiem

Erzeugendensystem Y. Weiter ist dabei

$Y \to X$, $y \mapsto y[F,F]$ eine Bijektion. Ein

beliebiges Elmt $y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r} \in F$ mit $r \in \mathbb{N}_0$,

$y_1, \dots y_r \in Y$ und $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}$ gehört offenbar

zu $[F,F]$ genau dann, wenn für jedes

$y \in Y$ gilt: $\sum_{\substack{i \\ y_i = y}} l_i = 0$. Wähle eine

Wohlordnung $<$ auf Y. Offenbar läßt sich

jedes Elmt von F modulo $[F,F]$ dann

eindeutig schreiben als

$$y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r}, \quad \text{wobei } r \in \mathbb{N}_0,\ y_1 < \dots < y_r \in Y$$
$$\text{und } l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Das ergibt (2).

„(2) → (1)": Sei $G = \coprod_{x \in X} \langle x \rangle$ mit $\forall x \in X : \langle x \rangle \cong C_\infty$.

Gemäß (5.4) ex eine freie abelsche Gruppe

F mit freiem Erzeugendensystem Y, das über

$\alpha : Y \to X$ in Bijektion zu X steht.

Weiter setzt sich α zu einem surjektiven Homom $\beta : F \to G$ fort. Klopsch

Wähle eine Wohlordnung $<$ auf Y und übertrage diese mittels α auf X. Dann lassen sich nach „(1)→(2)" bzw. Voraussetzung die Elemente von F und von G jeweils eindeutig schreiben als

$$y_1^{l_1} \cdots y_r^{l_r} \quad \text{bzw} \quad x_1^{l_1} \cdots x_r^{l_r},$$

wobei $r \in \mathbb{N}_0$, $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $y_1 < \dots < y_r$ bzw $x_1 < \dots < x_r \in X$. Somit stellt β einen Isom dar und G ist (wie F) eine freie abelsche Gruppe mit freiem Erzsyst $Y\alpha = X$. //

(5.7) <u>Satz</u>: Sei F eine freie abelsche Gruppe mit freiem Erzsyst X, und sei $H \leq F$. Dann ist H ebenfalls eine freie abelsche Gruppe mit einem freien Erzsystem Y, das $|Y| \leq |X|$ genügt.

<u>Bem</u>: Untergruppen von (absolut) freien Gruppen sind ebenfalls frei. Jedoch ist der Beweis ungleich schwieriger, und die Aussage bzgl der Ränge stimmt i.a. nicht.

Bew Wähle eine Wohlordnung $<$ auf X. Wähle weiter $\xi \notin X$ und setze $<$ auf $\hat{X} = X \cup \{\xi\}$ fort, indem $x < \xi$ für alle $x \in X$ gesetzt wird. Klopsch

Für $y \in \hat{X}$ definiere $F_y = \langle x \mid x \in X \text{ mit } x < y \rangle$, so daß gilt: Für $y \in X$ ist

$$F_{N(y)} = F_y \times \langle y \rangle \quad \text{für } N(y) = \min\{x \in \hat{X} \mid y < x\}.$$

Merke: $F_{y_0} = 1$, sofern $X \neq \emptyset$ ist und $y_0 = \min X$, während $F_\xi = F$ ist.

Wir setzen

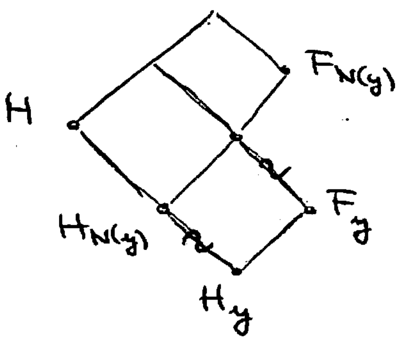
$$H_y = H \cap F_y \quad \text{für } y \in \hat{X}.$$

Nach den Isomorphiesätzen gilt für $y \in X$ dann

$$H_{N(y)}/H_y \cong (H \cap F_{N(y)})F_y/F_y$$

$$\leqslant F_{N(y)}/F_y \cong \langle y \rangle$$

$$\cong C_\infty.$$



Somit gilt, für $y \in X$, entweder

$$H_{N(y)} = H_y \quad \text{oder} \quad H_{N(y)} = H_y \times \underbrace{\langle z_y \rangle}_{\cong C_\infty}.$$

Dann ist $H = H_\xi$ ein direktes Produkt $\coprod_{H_{N(y)} \neq H_y} \langle z_y \rangle$. Gemäß (5.6) ist damit H eine freie abelsche Gruppe. Offenbar ist

$$|\{z_y \mid y \in X \text{ mit } H_{N(y)} \neq H_y\}| \leqslant |X|.$$

Klopsch

(5.8) <u>Def</u> Eine abelsche Gruppe G heißt <u>projektiv</u> (innerhalb der Varietät aller abelschen Gruppen), falls es zu jedem Homom $\alpha : G \to K$ und jedem surj Homom $\beta : H \to K$, für abelsche Gruppen H, K, stets einen Homom $\gamma : G \to H$ mit $\gamma\beta = \alpha$ gibt. [vgl (4.12)]

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, "\exists\gamma"'] \\ H \arrow[r, two heads, "\beta"'] & K \end{tikzcd}$$

(5.9) <u>Satz</u> (MacLane)

Eine abelsche Gruppe G ist projektiv genau dann, falls sie eine freie abelsche Gruppe ist.

<u>Bew</u> „$\Leftarrow$" beweist man analog zu (4.12).

„$\Rightarrow$" Sei G projektiv. Gemäß (5.5) gibt es einen Epimorphismus $\beta : F \to G$ von einer freien abelschen Gruppe F auf G.

Die Projektivitätseigenschaft liefert dann einen Homom $\gamma : G \to F$ mit $\gamma\beta = id_G$. Dann ist

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "id"] \arrow[dl, "\exists\gamma"'] \\ F \arrow[r, two heads, "\beta"'] & G \end{tikzcd}$$

$Kern(\gamma) = 1$ und $G \cong Bild(\gamma) \leq F$. Nach (5.7) ist G eine freie abelsche Gruppe. //

(5.10) <u>Lemma</u> Sei G eine abelsche Gruppe und $H \leq G$ derart, daß G/H eine freie abelsche Gruppe ist. Dann gilt $G = H \times K$

Klopsch

22

23

für eine geeignete Untergruppe $K \leq G$ mit $K \cong G/H$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\exists \gamma"'] \arrow[d, "id"] \\ G \arrow[r, "\beta"'] & F \end{tikzcd}$$

Bew Setze $F = G/H$ und schreibe $\beta : G \to F$ für die nat Projektion.

Da F nach (5.9) proj ist, finden wir einen Homom $\gamma : F \to G$ mit $\gamma\beta = id_F$.

Für $g \in G$ ist

$$(g^{-1} \cdot g^{\beta\gamma})^{\beta} = (g\beta)^{-1} \cdot g^{\beta \overset{id}{\cancel{\gamma\beta}}} = 1.$$

Folglich gilt $G = \mathrm{Kern}(\beta) \cdot \mathrm{Bild}(\gamma)$.

Weiter zeigt $\gamma\beta = id_F$, daß $(\mathrm{Kern}\,\beta) \cap (\mathrm{Bild}\,\gamma) = 1$ ist.

Das ergibt

$$G = \underbrace{\mathrm{Kern}(\beta)}_{=H} \times \mathrm{Bild}(\gamma).$$

//

(5.11) <u>Hilfssatz</u> Sei G eine abelsche Gruppe.

(1) $T = \{ g \in G \mid \exists m \in \mathbb{N} : g^m = 1 \}$, die Torsionselemente von G, bilden eine vollinvariante Untergruppe von G, und G/T ist torsionsfrei.

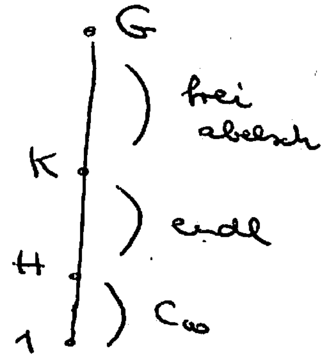
(2) Sei zusätzlich G endl erz. Dann ist G das direkte Produkt $G = T \times F$ einer endl Torsionsuntergruppe und einer endl erz freien abelschen Gruppe F.

Klopsch

<u>Bew</u> (1) Übung. /

(2) Sei $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, wobei OE $n \in \mathbb{N}_0$ minimal gewählt sei. Wir verwenden Induktion nach n. Gemäß (1) und (5.10) dürfen wir weiter voraussetzen, daß G torsionsfrei ist; ansonsten ersetzen wir G durch G/T mit T wie in (1). [Übung!]

Für $n=0$ ist $G=1$ frei abelsch mit freiem Erzsystem $\emptyset$. Sei nun $n \geq 1$, und setze $H = \langle x_n \rangle \cong C_\infty$. Indem wir die Induktionsvoraussetzung auf $\overline{G} = G/H = \langle \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{n-1} \rangle$ anwenden finden wir $K \leq G$ dergestalt, daß $H \leq K$, K/H endl und G/K eine endl erz freie abelsche Gruppe ist. Da G torsionsfrei ist, stellt die Abb



$$K \to H, \quad y \mapsto y^{|K:H|}$$

einen Isom von K auf eine Untergruppe von $H \cong C_\infty$ dar. Somit folgt $K \cong C_\infty$. Mit (5.10) und (5.6) folgt dann, daß $G \cong K \times G/K$ eine freie abelsche Gruppe ist. //