Klopsch

§2 Kompositions- und Hauptreihen

GV. Sei G eine Gruppe mit Operatoren Ω.

(2.1) Def: Eine (endl) Ω-Reihe für G ist eine endl Kette

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_r = G \qquad (r \in \mathbb{N}_0)$$

von Ω-Untergruppen G_i von G dergestalt, daß $G_i \trianglelefteq G_{i+1}$ für $0 \leq i \leq r-1$.

[NB: Im allg ist $G_i \ntrianglelefteq G_{i+2} \dots$]

Die G_i heißen Terme (oder Glieder) der Reihe, die Ω-Gruppen G_{i+1}/G_i heißen Faktoren der Reihe. Ist die Kette echt aufsteigend, dh $G_i \neq G_{i+1}$ für $0 \leq i \leq r-1$, so nennen wir r die Länge der Reihe.

Eine Untergruppe H von G heißt Ω-subnormal in G, iZ $H \trianglelefteq\trianglelefteq_\Omega G$, falls H als Glied in wenigstens einer Ω-Reihe für G vorkommt.

Spezialfälle:

$\Omega = \emptyset$: Reihe, subnormale Untergruppe

$\Omega = \mathrm{Inn}(G)$: Normalteiler-Reihe (oder normale Reihe)

$\Omega = \mathrm{Aut}(G)$: charakteristische Reihe

$\Omega = \mathrm{End}(G)$: vollinvariante Reihe

$\frac{5}{6}$

Bspl: • $1 \trianglelefteq G$ ist stets eine Ω-Reihe

• Für $D_{2n} = \langle a, t \rangle$ mit $a^n = t^2 = 1$, $a^t = a^{-1}$

ist $1 \trianglelefteq \langle a \rangle \trianglelefteq D_{2n}$ eine charakteristische Reihe $(n \geq 3)$.

(2.2) Def: Sind

$\mathcal{H}: \quad 1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_m = G$

$\mathcal{K}: \quad 1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_n = G$

Ω-Reihen für G, so heißt $\mathcal{H}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{K}$ falls alle Glieder von $\mathcal{K}$ (ggf mit Multiplizitäten) auch Glieder von $\mathcal{H}$ sind. Wir nennen $\mathcal{H}$ eine echte Verfeinerung von $\mathcal{K}$, falls zusätzlich Glieder in $\mathcal{H}$ vorkommen, die gar nicht in $\mathcal{K}$ stehen.

Die Ω-Reihen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ heißen Ω-äquivalent falls $m=n$ ist und es eine 1-1-Zuordnung zw den Faktoren H_{i+1}/H_i von $\mathcal{H}$ und denjenigen K_{j+1}/K_j von $\mathcal{K}$ gibt (ggf unter Berücksichtigung von Multiplizitäten), so daß einander zugeordnete Faktoren Ω-isomorph zueinander sind.

(2.3) Zassenhaussches Lemma (1934)

Seien $A_1, A_2, B_1, B_2 \leq_\Omega G$ mit $A_1 \trianglelefteq A_2$, $B_1 \trianglelefteq B_2$

Für $i,j \in \{1,2\}$ sei $D_{ij} = A_i \cap B_j$.

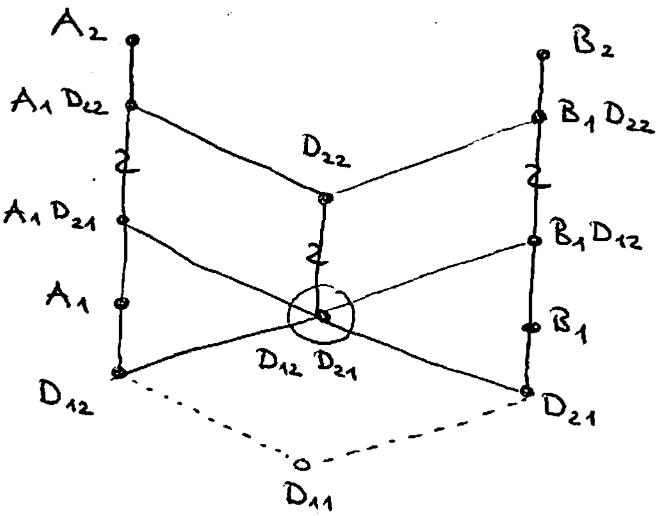
Dann gelten

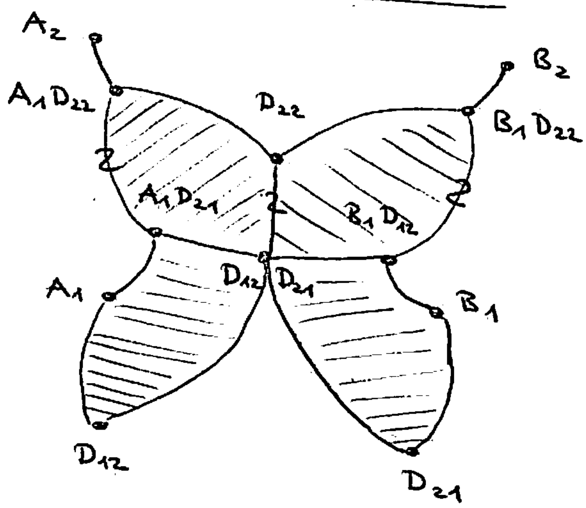
$$A_1 D_{21} \trianglelefteq A_1 D_{22} \quad , \quad B_1 D_{12} \trianglelefteq B_1 D_{22}$$

sowie

$$A_1 D_{22} / A_1 D_{21} \cong_\Omega B_1 D_{22} / B_1 D_{12} .$$

Man nennt dies auch das „<u>Schmetterlingslemma</u>":





<u>Bew</u>: Aus $B_1 \trianglelefteq B_2$ folgt

$$(*) \qquad D_{21} = A_2 \cap B_1 \trianglelefteq A_2 \cap B_{2} = D_{22} ,$$

und ähnlich $D_{12} \trianglelefteq D_{22}$. Insbesondere ist $D_{12} D_{21} = D_{21} D_{12} \trianglelefteq D_{22}$.

Weiter liefert $A_1 \trianglelefteq A_2$, indem wir $(*)$ in A_2 modulo A_1 lesen:

$$A_1 D_{21} \trianglelefteq A_1 D_{22} ,$$

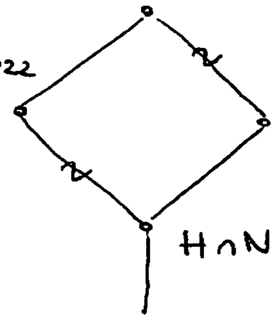
und ähnlich $B_1 D_{12} \trianglelefteq B_1 D_{22}$.

Wir wenden den zweiten Isomorphiesatz in $(0.23)_\Omega$ auf die Gruppen $H = D_{22}$, $N = A_1 D_{21}$ und $G = \langle H \cup N \rangle = HN$ an:

$G = \langle H \cup N \rangle = HN = A_1 D_{22}$ Klopsch

$H = D_{22}$

$N = A_1 D_{21}$



Dedekindsche Identität (0.18)

$$H \cap N = D_{22} \cap A_1 D_{21} \overset{\downarrow}{=} (D_{22} \cap A_1) D_{21} = D_{12} D_{21}$$

ergibt

$$A_1 D_{22} / A_1 D_{21} \cong_\Omega D_{22} / D_{12} D_{21} .$$

Ähnlich erhalten wir

$$B_1 D_{22} / B_1 D_{12} \cong_\Omega D_{22} / D_{21} D_{12} ,$$

und die Behauptung folgt. //

(2.4) <u>Schreierscher Verfeinerungssatz</u> (1928)

Je zwei Ω-Reihen

$\mathcal{H}: \quad 1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_m = G$

$\mathcal{K}: \quad 1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_n = G$

für G besitzen zueinander <u>Ω-äquivalente</u> Verfeinerungen. !

<u>Bew:</u> Schreibe $H_{m+1} = K_{n+1} = G$ und

für $i \in \{0,1,..,m\}$, $j \in \{0,1,..,n\}$ def

$$H_{ij} = H_i (H_{i+1} \cap K_j),$$
$$K_{ij} = K_j (H_i \cap K_{j+1}).$$

| merke $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, $K_j \trianglelefteq K_{j+1}$

Anwendung von (2.3) auf

$A_1 = H_i$, $A_2 = H_{i+1}$ $(0 \leq i \leq m)$

$B_1 = K_j$, $B_2 = K_{j+1}$ $(0 \leq j \leq n)$

liefert (mit der Notation wie in (2.3))

$$H_{ij} = A_1 D_{21} \trianglelefteq A_1 D_{22} = H_{i,j+1} \,,$$

$$K_{ij} = B_1 D_{12} \trianglelefteq B_1 D_{22} = K_{i+1,j}$$

sowie

$$H_{i,j+1}/H_{i,j} \cong_{\Omega} K_{i+1,j}/K_{ij} \,.$$

Beachten wir nun noch

$$H_{i,n+1} = H_{i+1,0} \qquad \text{für} \quad 0 \le i \le m \,,$$

$$K_{m+1,j} = K_{0,j+1} \qquad \text{für} \quad 0 \le j \le n \,,$$

so sehen wir, daß

$$\hat{\mathcal{H}} : \quad H_{ij} \quad \text{mit} \quad 0 \le i \le m \,, 0 \le j \le n \,,$$

also

$$1 = \underset{\substack{\| \\ H_0}}{H_{00}} \trianglelefteq H_{01} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ H_1}}{H_{0n}} \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ H_1}}{H_{10}} \trianglelefteq H_{11} \trianglelefteq \ldots \quad \ldots \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ H_m}}{H_{mn}} = G \,,$$

und

$$\hat{\mathcal{K}} : \quad K_{i,j} \quad \text{mit} \quad 0 \le j \le n \,, 0 \le i \le m \,,$$

also

$$1 = \underset{\substack{\| \\ K_0}}{K_{00}} \trianglelefteq K_{10} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ K_1}}{K_{m0}} \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ K_1}}{K_{01}} \trianglelefteq K_{11} \trianglelefteq \ldots \quad \ldots \trianglelefteq \underset{\substack{\| \\ K_n}}{K_{mn}} = G \,,$$

die gewünschten Ω-äquivalenten Verfeinerungen liefern. //

Klopsch

(2.5) <u>Def</u>: Eine Ω-Reihe für G, die keine wiederholt auftretenden Glieder und keine echten Verfeinerungen besitzt, heißt eine <u>Ω-Kompositionsreihe</u> für G.

In den Spezialfällen $\Omega=\emptyset$, $\Omega=\mathrm{Inn}(G)$, $\Omega=\mathrm{Aut}(G)$, $\Omega=\mathrm{End}(G)$ sprechen wir von <u>Kompositionsreihen</u>, <u>Hauptreihen</u>, <u>charakteristischen Hauptreihen</u>, <u>vollinvarianten Hauptreihen</u>.

<u>Bspe</u>

- C_∞ besitzt keine Kompositionsreihe.
- Jede <u>endl</u> Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe, Hauptreihe, etc. In der Regel gibt es viele verschiedene solche.
- $D_8 = \langle a, t\rangle$ mit $a^4 = t^2 = 1$, $a^t = a^{-1}$ hat die Kompreihe

$$1 \trianglelefteq \langle t\rangle \trianglelefteq \langle t, a^2\rangle \trianglelefteq \langle t, a\rangle = D_8,$$

die Hauptreihe (und Kompreihe!)

$$1 \trianglelefteq \langle a^2\rangle \trianglelefteq \langle a^2, t\rangle \trianglelefteq \langle a, t\rangle = D_8,$$

die charakteristische Hauptreihe
(und Hauptreihe, und Kompreihe)

$$1 \trianglelefteq \langle a^2\rangle \trianglelefteq \langle a\rangle \trianglelefteq \langle a, t\rangle = D_8,$$

die vollinvariante Hauptreihe

$$1 \trianglelefteq \langle a^2\rangle \trianglelefteq D_8. \qquad [\text{ÜB!}]$$

Klopsch

(2.6) Def.

Eine Ω-Gruppe S heißt Ω-einfach, falls $S \neq 1$ und S außer $1, S$ keine normalen Ω-Untergruppen besitzt.

Eine $\emptyset$-einfache Gruppe heißt einfache Gruppe.

Eine $\mathrm{Aut}(G)$-einfache Gruppe G heißt charakteristisch einfache Gruppe.

Bspl: Jeder minimale Normalteiler $1 \neq N \trianglelefteq G$ einer Gruppe G ist charakteristisch einfach.

(2.7) Lemma

Eine Ω-Reihe für G ist eine Ω-Kompreihe gdw alle ihre Faktoren Ω-einfach sind.

Bew: üb. //

(2.8) Satz (Jordan 1868, Hölder 1889)

Ist $\mathcal{H}$ eine Ω-Kompreihe und $\mathcal{K}$ irgendeine Ω-Reihe ohne wiederholte Glieder für die Ω-Gruppe G, so besitzt $\mathcal{K}$ eine Verfeinerung, die eine zu $\mathcal{H}$ Ω-äquiv Ω-Kompreihe für G darstellt.

Bem: Insbesondere gelten, sofern G überhaupt eine Ω-Kompreihe besitzt:

- Jede Ω-Reihe für G ohne wiederholte Terme besitzt eine Verfeinerung zu einer Ω-Kompreihe für G.

Klopsch

2) Je zwei Ω-Komp reihen für G haben dieselbe Länge und sind Ω-äquivalent.

$\frac{6}{7}$

<u>Bew</u> Nach (2.4) besitzen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ zueinander Ω-äquiv Verfeinerungen $\hat{\mathcal{H}}$ und $\hat{\mathcal{K}}$.
Da $\mathcal{H}$ keine echten Verfeinerungen besitzt, ist die Verfeinerung von $\mathcal{K}$ nach Streichen wiederholt auftretender Glieder Ω-äquiv zu $\mathcal{H}$.
Nach (2.7) ist dies dann ebenfalls eine Ω-Kompreihe. //

<u>Bem</u>: Besitzt G eine Ω-Kompreihe, so spricht man folglich von der <u>Ω-Kompositionslänge</u> von G und von den (bis auf Isom und Reihenfolge eindeutigen) <u>Ω-Kompfaktoren</u> von G, inklusive etwaigen Multiplizitäten.

(2.9) <u>Bem</u>: Die Zerlegung von Gruppen in Kompositionsfaktoren ist hauptsächlich für endl Gruppen interessant.

Die <u>Klassif der endl einf Gruppen</u> besagt

Jede endl einf Gruppe ist isom zu einer der nachfolgenden Gruppen:

1) C_p, $p \in \mathbb{P}$ (abelsch)

2) $\mathrm{Alt}(n)$, $n \geq 5$ (alternierend)

3) endl einf Gruppen Liescher Typs

< klassische / exzeptionelle , zB $PSL(\ell+1, q)$

4) 26 sporadische Gruppen,

zB Mathieusche Gruppen $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$
(1861, 1873)

$$\text{zB } |M_{24}| = 244.823.040$$
$$= 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$$

[~ 100te Mathematiker, 1000de Zeitschriftenseiten,
Hauptperiode 1955 - 1985 +]

(2.10) <u>Fundamentalsatz der Arithmetik</u>

Jede natürliche Zahl besitzt eine iw | Spaß!
eindeutige Primfaktorzerlegung.

<u>Bew</u>: Wende (2.8) auf die zykl Gruppe
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ an. //