Klopsch

§1 Automorphismen, halbdirekte Produkte und Gruppen mit Operatoren

GV: Sei G eine Gruppe.

(1.1) Def/Satz

Ein Automorphismus von G ist ein Isomorphismus $\alpha : G \to G$. Die Menge aller Autom von G bildet bzgl Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$.

Für $g \in G$ liefert die Konjugationsabb

$$\iota_g : G \to G, \quad x \mapsto x^g = g^{-1} x g$$

einen inneren Autom von G.

Aufgrund der Identität

$$(x^g)^h = x^{gh} \qquad \text{für } x \in G;\ g, h \in G$$

bilden die inneren Autom eine Untergruppe

$$\mathrm{Inn}(G) = \{ \iota_g \mid g \in G \} \leq \mathrm{Aut}(G).$$

Die Abb

$$\iota : G \to \mathrm{Inn}(G), \quad g \mapsto \iota_g$$

ist ein surjektiver Homom, sein Kern

$$\mathrm{Ker}(\iota) = \{ g \in G \mid \forall x \in G : gx = xg \} = Z(G)$$

heißt das Zentrum von G. Also gilt

$$\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G).$$

Die Identität

$$x^{\alpha^{-1} \iota_g \alpha} = (g^{-1} x^{\alpha^{-1}} g)^{\alpha} = (g^{-1})^{\alpha} x^{\alpha^{-1}\alpha} g^{\alpha}$$

$$= (g^{\alpha})^{-1} x \, g^{\alpha} = x^{\iota(g^{\alpha})} \quad \text{für} \quad x \in G, \; \alpha \in \mathrm{Aut}(G), \; \iota_g \in \mathrm{Inn}(G)$$

zeigt, daß

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G).$$

Der Quotient

$$\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$$

heißt <u>äußere Automorphismengruppe</u> von G.

Merke: In der Regel gibt es keine Einbettung von $\mathrm{Out}(G)$ in $\mathrm{Aut}(G)$!

<u>Bem</u>: Ist $Z(G) = 1$, so gilt

$$G \cong \mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$$

und $Z(\mathrm{Aut}(G)) = 1$.

Wir erhalten einen Turm von Autom.gruppen:

$$G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G)) \hookrightarrow \ldots \qquad (*)$$

Wielandt (1939): Ist G endl und $Z(G) = 1$, so wird die aufsteigende Kette $(*)$ nach endl vielen Schritten konstant.

<u>Bem</u>: Eine wesentliche Konsequenz der Klassif der endl einf Gruppen ist, daß Schreiers Vermutung gilt: Ist G eine endl einf Gruppe, so ist $\mathrm{Out}(G)$ eine (vglw kleine) auflösbare Gruppe.

(1.2) **Satz** Sei G eine zykl Gruppe. Klopsch

(1) Ist G unendl, also $G \cong C_\infty$ [$\cong \mathbb{Z}$],

so gilt

$$\mathrm{Aut}(G) = \{id, \alpha\} \cong C_2,$$

wobei $\alpha : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$.

(2) Ist $n = |G| < \infty$, also $G \cong C_n$ [$\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$],

so gilt

$$\mathrm{Aut}(G) = \{ \alpha_k \mid 1 \leq k \leq n,\ \mathrm{ggT}(k,n) = 1 \},$$

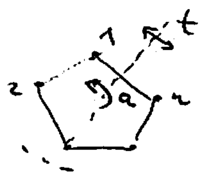
wobei $\alpha_k : G \to G,\ g \mapsto g^k$.

Insbesondere ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to \mathrm{Aut}(G),\ \bar{k} \mapsto \alpha_k$ ein Isom, und somit ist $\mathrm{Aut}(G)$ abelsch der Ordnung $\varphi(n)$.

Bew: Schreibe $G = \langle x \rangle$. Jeder Homom von G in sich ist durch das Bild von x eindeutig bestimmt, also von der Form $G \to G,\ g \mapsto g^m$. Die Surjektivität erfordert dann $\langle x \rangle = \langle x^m \rangle$, im Fall (1) also $m \in \{1, -1\}$ und im Fall (2), gemäß (0.14)(iii), $m \in \{k \mid \mathrm{ggT}(k,n) = 1\}$. //

(1.3) **Bspe** Im allgemeinen ist es nicht leicht, Automorphismengruppen explizit zu berechnen.

Was ist $\mathrm{Aut}(D_{2n})$? [$n \geq 3$]



Erinnerung: $D_{2n} \cong \langle a, t \rangle \leq \mathrm{Sym}(n)$

für $a = (1\ 2\ \dots\ n)$, $t = (1\ n)(2\ n{-}1)\dots$

Idee:

- $N = \langle a \rangle \trianglelefteq D_{2n}$ ist die einzige zyklische Untgr der Ordnung n in D_{2n}

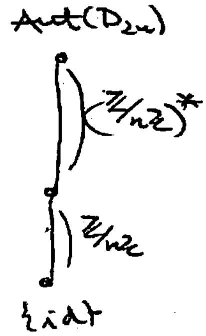
  Wir erhalten also
  $$\mathrm{Aut}(D_{2n}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \cong \mathrm{Aut}(C_n) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

- Diese Abb ist surj: Jeder Autom von $N \cong C_n$ setzt sich zu einem Autom von D_{2n} fort (indem man t auf t abbildet).

- Der Kern der Abb, bestehend aus allen $\alpha \in \mathrm{Aut}(D_{2n})$ mit $\alpha|_N = id_N$, besitzt n Elemente (t wird auf ta^i abgebildet) und ist isom zu C_n.

- $\mathrm{Aut}(D_{2n}) \cong \mathrm{Aut}(C_n) \ltimes C_n$, der Holomorph von C_n

  halbdirektes Produkt, s.u.



Welche Form hat $\mathrm{Inn}(D_{2n})$?

(1.4) <u>Def/Satz</u>

(1) Sei $N \trianglelefteq G$. Ein <u>Komplement</u> zu N in G ist eine Untergruppe $H \leq G$ mit
$$HN (= NH) = G \quad \text{und} \quad H \cap N = 1.$$

Bspe: D_{2n} ...

Ist H ein Komplement zu N in G, so läßt sich jedes Elmt $g \in G$ eindeutig schreiben als Produkt $g = h \cdot n$ mit $h \in H$, $n \in N$ [ÜB!]

Wir nennen G dann ein <u>halbdirektes Produkt</u>

von H und N, in Zeichen

$$G = H \ltimes N \quad (\text{oder auch } G = N \rtimes H).$$

Weiter erhalten wir einen Homom

$$\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N), \quad h \mapsto h^\alpha,$$

wobei $x^{h^\alpha} = h^{-1} x h$ für $x \in N$.

Die Daten (H, N, α) bestimmen G bis auf Isomorphie vollständig:

$$(h_1 n_1) \cdot (h_2 n_2) = (h_1 h_2)\,(h_2^{-1} n_1 h_2\, n_2)$$

$$= \underbrace{(h_1 h_2)}_{\in H}\,(\underbrace{n_1^{h_2^\alpha} n_2}_{\in N})$$

(2) Sind umgekehrt Gruppen H, N und ein Homom $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben, so können wir auf der Menge $H \times N$ wie folgt eine Gruppenstruktur etablieren:

$$(h_1, n_1)\,(h_2, n_2) = (h_1 h_2,\ n_1^{h_2^\alpha} n_2). \qquad [\text{ÜG}]$$

Bezeichne diese neue Gruppe $\tilde{G}$. In $\tilde{G}$ sind

$$\tilde{H} = \{(h,1) \mid h \in H\} \leq \tilde{G} \quad \text{mit } \tilde{H} \cong H,$$

$$\tilde{N} = \{(1,n) \mid n \in N\} \trianglelefteq \tilde{G} \quad \text{mit } \tilde{N} \cong N.$$

Weiter gelten: $\tilde{H}\tilde{N} = \tilde{G}$ und $\tilde{H} \cap \tilde{N} = 1$, also $\tilde{G} = \tilde{H} \ltimes_\alpha \tilde{N}$. Die Gruppe $\tilde{G}$ heißt das (äußere) halbdirekte Produkt von H und N

Klopsch

bzgl α ; der Einfachheit halber schreibt man $\tilde{G} = H \ltimes_\alpha N$ bzw $\tilde{G} = N \rtimes_\alpha H$.

Vorsicht Nicht jeder Normalteiler hat ein Komplement.

Betrachte etwa $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $N = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(1.5) Def Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt

- invariant in G, falls H invariant unter inneren Autom von G ist, dh falls H ein Normalteiler von G ist.
- charakteristisch in G, falls H invariant unter allen Autom von G ist.
- vollinvariant in G, falls H invariant unter bel Endomorphismen $G \to G$ ist.

Bspe: $Z(G) \leq_{char} G$,

$$[G,G] \leq_{vollinv} G$$
$$\| $$
$$\langle [x,y] \mid x,y \in G \rangle$$

(1.6) Lemma Seien $K, H \leq G$. Dann gelten:

(i) $H \leq_{vollinv} G \Rightarrow H \leq_{char} G \Rightarrow H \trianglelefteq G$

(ii) $K \leq_{vollinv} H \leq_{vollinv} G \Rightarrow K \leq_{vollinv} G$

$K \leq_{char} H \leq_{char} G \Rightarrow K \leq_{char} G$

[ia $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G \not\Rightarrow K \trianglelefteq G$]

(✱) (iii) $K \leq_{char} H \trianglelefteq G \Rightarrow K \trianglelefteq G$

Bew: (i) ✓

(ii) Ist $H \leq_{char} G$, so liefert die Einschränkung eines Autom $\alpha \in Aut(G)$ auf H einen Autom von H. Entsprechendes gilt für vollst inv Untergruppen und Endom.

[$G = D_8$ liefert Gegenbspe zu

$$K \trianglelefteq H \trianglelefteq G \Rightarrow K \trianglelefteq G \text{]}$$

(iii) Sei $K \leq_{char} H \trianglelefteq G$. Konj mit $g \in G$ induziert einen Autom von H. Da $K \leq_{char} H$, folgt, daß K unter Konj mit g invariant ist. //

(1.7) Def Eine Gruppe mit (Rechts-) Operatoren ist formal ein Tupel $G = (G, \Omega, \alpha)$, das besteht aus

- einer Gruppe G
- einer Menge Ω von „Operatoren"
- einer Abb $\alpha : G \times \Omega \to G$, so daß für jedes $\omega \in \Omega$ die Abb

$$G \to G, \quad g \mapsto (g, \omega)\alpha =: g^{\omega}$$

einen Endom von G darstellt.

Wir nennen G dann knapp eine Ω-Gruppe, und α ist zumeist nur implizit gegeben.

Bspl Ein $\emptyset$-Gruppe ist eine gewöhnliche Gruppe (ohne Operatoren).

Uns interessieren primär die Fälle

$$\Omega = \mathrm{Inn}(G), \quad \Omega = \mathrm{Aut}(G), \quad \Omega = \mathrm{End}(G)$$

mit den offensichtlichen Operationen.

Eine <u>Ω-Untergruppe</u> von $G = (G, \Omega, \alpha)$, i.Z. $H \leq_\Omega G$, ist formal von der Gestalt $H = (H, \Omega, \alpha|_{H \times \Omega})$ dergestalt, daß dieses H wieder eine Ω-Gruppe ist.

Konkret bedeutet das:

$$H \leq G \quad \text{und} \quad \forall \omega \in \Omega \; \forall h \in H : h^\omega \in H.$$

Die von $X \subseteq G$ <u>erzeugte Ω-Untergruppe</u> ist

$$\begin{aligned} \langle X^\Omega \rangle &= \bigcap \{ H \leq_\Omega G \mid X \subseteq H \} \\ &= \left\{ \prod_{i=1}^{r} (x_i^{e_i})^{\omega_{i1}\omega_{i2}\cdots\omega_{i,t(i)}} \;\middle|\; \begin{array}{l} r \in \mathbb{N}_0,\ x_i \in X, \\ e_i \in \{1,-1\},\ t(i) \in \mathbb{N}_0, \\ \omega_{ij} \in \Omega \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ist $N \trianglelefteq_\Omega G$ eine normale Ω-Untergr von G, so trägt G/N in natürlicher Weise die Struktur $(G/N, \Omega, \bar{\alpha})$ einer Ω-Gruppe:

$$(xN, \omega)\bar{\alpha} = (x, \omega)\alpha \cdot N,$$

oder knapper $(xN)^\omega = x^\omega N$ für $x \in G$, $\omega \in \Omega$.

Ein <u>Ω-Homomorphismus</u> $\varphi : G \to H$ zwischen zwei Ω-Gruppen ist ein Ω-verträglicher Gruppenhomom: Klopsch

$$(xy)^\varphi = x^\varphi y^\varphi \quad \text{und} \quad (x^\omega)^\varphi = (x^\varphi)^\omega$$

für $x, y \in G$; $\omega \in \Omega$.

Desweiteren def man wie üblich <u>Ω-Homomorphismen</u> und <u>Ω-Automorphismen</u>.

<u>Bem</u>: Die Homomorphie- und Korrespondenzsätze in (0.23) gelten sinngemäß für Ω-Gruppen.

Bsple:

(1) R ein Ring, M ein R-(Rechts-)Modul $\rightsquigarrow$ M eine R-Gruppe und Untermoduln entspr R-Untergruppen

(2) Für $\Omega = \mathrm{Inn}(G)$, $\Omega = \mathrm{Aut}(G)$ bzw $\Omega = \mathrm{End}(G)$ sind die Ω-Untergruppen von G gerade die Normalteiler, die char Untergr bzw die vollinvarianten Untergruppen.