Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 13

Abgabe bis **Mittwoch**, den 22.01.2020, 9.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 13.2 und 13.3 ab. Aufgabe 13.1 ist mündlich, ggf. mit Notizen vorzubereiten; Aufgaben 13.4 bis 13.6 sind optional. Weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 13.1

Sei $G = \prod_{i \in I} G_i$ das cartesische Produkt einer Familie G_i, $i \in I$, von Gruppen, mit kanonischen Projektionen $\pi_i \colon G \to G_i$ für $i \in I$. Eine Gruppe heißt *subcartesisches Produkt* der G_i, $i \in I$, falls sie isomorph zu einer Untergruppe $H \leq G$ mit $H\pi_i = G_i$ für alle $i \in I$ ist.

(a) Zeigen Sie: Eine Gruppe ist residuell endlich genau dann, wenn sie ein subcartesisches Produkt von endlichen Gruppen ist.

(b) Zeigen Sie: Die Klasse aller perfekten Gruppen ist abgeschlossen unter cartesischen Produkten, aber *nicht* abgeschlossen unter subcartesischen Produkten.

(*Hinweis*: Betrachten Sie beispielsweise $\mathrm{SL}(2,5) \times \mathrm{SL}(2,5)$.)

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Ein (linearer) *Charakter* $\chi \colon A \to \mathbb{C}^\times$, $a \mapsto \chi(a)$ einer abelschen Gruppe A ist ein Homomorphismus von A in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$.[1] Die Menge $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ aller Charaktere von A bildet bzgl. der Verknüpfung

$$(\chi_1\chi_2)(a) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a) \qquad \text{für } \chi_1, \chi_2 \in A^* \text{ und } a \in A$$

eine Gruppe, die sogenannte *Charaktergruppe* A^*.

(a) Beschreiben Sie für eine endliche zyklische Gruppen $A = \langle a \rangle \cong C_n$ explizit alle Charaktere $\chi \colon A \to \mathbb{C}^\times$. Folgern Sie in diesem Fall: $A \cong A^*$.

(b) Zeigen Sie: Aus $A = B \times C$ folgt $A^* \cong B^* \times C^*$.

(c) Folgern Sie: Für jede endliche abelsche Gruppe A gilt $A \cong A^*$.

(d) Erläutern Sie, warum für $A \cong C_\infty$ nicht ebenfalls $A \cong A^*$ gilt.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $n = |G : H| < \infty$. Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \nmid n$, und sei M ein KG-Modul.

Zeigen Sie: Ist M als KH-Modul vollständig zerlegbar, so ist M auch als KG-Modul vollständig zerlegbar.

Hinweis: Argumentieren Sie ähnlich wie in dem Beweis zu dem Satz von Maschke, der dem Spezialfall $H = 1$ entspricht. Denken Sie zunächst an den Fall $\dim_K(M) < \infty$; überlegen Sie anschließend, wie Sie diese Zusatzannahme, z. B. mit Ergebnissen aus Abschnitt 3 der Vorlesung umgehen können.

Bitte wenden!

[1] Merke: Charaktere werden traditionsgemäß von links auf Elemente von A angewandt.

Die letzten drei Aufgaben sind optional; sie liefern einen alternativen Zugang zu der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen.

Aufgabe 13.4

Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k,l}(\mathbb{Z})$, und sei r der Rang von A über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie per Induktion nach $k + l$: Es existieren $B \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ und $C \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{Z})$ dergestalt, dass gilt:

$$BAC = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N} \text{ mit } n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r.$$

Hinweis: Sei $A \neq 0$. Wählen Sie für n_1 den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge von A, und zeigen Sie, z. B. per Induktion nach $\min\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \neq 0\}$, dass Sie durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen erreichen können, dass der $(1,1)$-Eintrag von A ohne Einschränkung bereits den Wert n_1 hat. Argumentieren Sie nun per Induktion nach $k + l$.

Aufgabe 13.5 (6 Punkte)

Sei $M = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_l \cong \mathbb{Z}^l$ eine additive geschriebene freie abelsche Gruppe von endlichem Rang l, oder äquivalent: ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang l. Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k,l}(\mathbb{Z})$ schreiben wir $M_A = \mathbb{Z}f_1 + \ldots + \mathbb{Z}f_k \leq M$, wobei $f_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} e_j$ für $1 \leq i \leq k$ sei.

(a) Zeigen Sie: Für $B \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ gilt $M_{BA} = M_A$ und folglich $M/M_A = M/M_{BA}$.

(b) Zeigen Sie: Für $C = (c_{ij}) \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{Z})$ gibt es genau einen Modul-Automorphismus $M \to M$ mit $e_i \mapsto \sum_{j=1}^{l} c_{ij} e_j$ für $1 \leq i \leq l$. Folglich gilt $M/M_A \cong M/M_{AC}$.

(c) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 13.4: Es existieren $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$, so dass gilt:

$$M/M_A \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{l-r \text{ Faktoren}}.$$

Aufgabe 13.6

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 13.5 (und unabhängig von dem entsprechenden Resultat aus der Vorlesung): Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen

$$C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r} \times \underbrace{C_\infty \times \ldots \times C_\infty}_{s \text{ Faktoren}},$$

wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_1 \mid \ldots \mid n_r$ sind.