Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 12

Abgabe der Lösungen bis zum 13.01.2020, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 12.1 und 12.4 ab. Die weiteren Aufgaben sind mündlich, ggf. mit Notizen vorzubereiten; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

(a) Seien $d, c \in \mathbb{N}$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppenklassen sogar Gruppenvarietäten sind und finden Sie, wenn möglich, definierende Worte: die Klasse (i) aller Torsionsgruppen, (ii) aller d-erzeugten Gruppen, (iii) aller nilpotenten Gruppen der Nilpotenzklasse höchstens c.

(b) Sei p eine Primzahl. Beschreiben Sie die Gruppenvarietäten, welche durch die folgenden 1-elementigen Wortmengen vermittelt werden: (i) $W_1 = \{[x_1, x_2]x_3^p\}$, (ii) $W_2 = \{[x_1^p, x_2^p]\}$, (iii) $W_3 = \{[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\}$.
(Beispiel: $W_0 = \{[x_1, x_2]\}$ vermittelt die Varietät der abelschen Gruppen.)

Aufgabe 12.2

Sei $F = F_\infty = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ eine freie Gruppe von abzählbar unendlichem Rang, und sei $W \subseteq F$, aber $W \nsubseteq [F, F]$. Zeigen Sie: Es exisitieren $m \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{W}_0 \subseteq [F, F]$, so dass $\widetilde{W} = \{x_1^m\} \cup \widetilde{W}_0$ die Bedingung $\mathfrak{V}(W) = \mathfrak{V}(\widetilde{W})$ erfüllt.

Hinweise: Betrachten Sie zunächst den speziellen Fall $W = \{w\}$. Für geeignetes $r \in \mathbb{N}_0$ lässt sich w in der Form $w = x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r} v$ mit $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ und $v \in [F, F]$ schreiben. Setzen Sie $m = \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_r)$, und zeigen Sie: $\mathfrak{V}(\{w\}) = \mathfrak{V}(\{x_1^{m_1}, \ldots, x_r^{m_r}, v\}) = \mathfrak{V}(\{x_1^m, v\})$. Verallgemeinern Sie ihr Resultat nun für endliches W und schließlich für allgemeines W.

Aufgabe 12.3

(1) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Elemente x, y, z einer beliebigen Gruppe:

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \qquad \text{und} \qquad [x, yz] = [x, z][x, y]^z.$$

Folgern Sie für $m \in \mathbb{N}$ daraus: $[x, y]^m \equiv [x^m, y] \equiv [x, y^m]$ modulo $\gamma_3(\langle x, y \rangle)$.

(2) Sei $G = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle$ eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Zeigen Sie induktiv: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $\gamma_i G / \gamma_{i+1} G$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(3) Sei G eine nilpotente Gruppe mit $|G : \gamma_2 G| < \infty$. Zeigen Sie induktiv: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $|\gamma_i G : \gamma_{i+1} G| < \infty$. Folgern Sie G ist endlich.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

(1) Sei G eine nilpotente Gruppe. Zeigen Sie, dass $T = \{g \in G \mid \exists m \in \mathbb{N} : g^m = 1\}$ eine vollständig invariante Untergruppe von G bildet und G/T torsionsfrei ist.

Hinweis: Betrachten Sie, für $x, y \in T$, die Untergruppe $H = \langle x, y \rangle$. Folgern Sie mit Hilfe der vorstehenden Aufgabe $x^{-1}y \in H \subseteq T$.

(2) Geben Sie eine Gruppe an, deren Torsionselemente keine Untergruppe bilden.