Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 10

Abgabe der Lösungen bis zum 16.12.2019, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgaben 10.1, 10.4, 10.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 10.2, 10.3 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie: Jede endliche Gruppe ist endlich präsentierbar.

Zusatz. Kennen Sie eine Gruppe, die endlich erzeugt, aber (zumindest potenziell) nicht endlich präsentierbar ist?

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie: $\mathrm{Alt}(4)$ ist isomorph zu $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^3 = 1 \rangle$.

Hinweis: Betrachten Sie die durch Rechtsmultiplikation auf den Nebenklassen $\langle y \rangle$, $\langle y \rangle x$, $\langle y \rangle xy$, $\langle y \rangle xy^2$ gegebene Operation der Gruppe.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Seien $n, r \in \mathbb{N}$ mit $r < n$.

(a) Sei A eine abelsche Gruppe mit Erzeugern $x_1, \ldots, x_n$ und definierenden Relationen: $[x_i, x_j] = 1$ für $1 \leq i < j \leq n$ sowie r weiteren Relationen. Zeigen Sie: A ist unendlich.

(b) Sei G eine endlich präsentierte Gruppe mit n Erzeugenden und r definierenden Relationen. Zeigen Sie: G ist unendlich.

Aufgabe 10.4

Sei p eine Primzahl, und sei G eine endliche p-Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Ist $G \neq 1$, so ist $Z(G) \neq 1$.

(*Hinweis*: Beachten Sie, dass G die disjunkte Vereinigung von Konjugationsklassen ist und dass die Anzahl der Elemente in einer Konjugationsklasse jeweils eine p-Potenz ist.)

(b) Folgern Sie: Ist $|G| = p^n$ mit $n \geq 2$, so ist G nilpotent der Klasse $c \leq n - 1$.

(*Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 11.1.)

(c) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung p^2.

Aufgabe 10.5

Sei p eine Primzahl und $G_p = \langle x, y \mid x^p = y^p = (xy)^p = 1 \rangle$. Zeigen Sie, dass G_p für $p > 2$ unendlich, aber G_2 endlich ist.
Bestimmen Sie die Ordnung und den Isomorphietyp von G_2.