

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis zum 02.12.2019, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgabe 8.3 ist mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 8.1 und 8.2 ab; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Sei $G = \mathbb{Q}$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Zeigen Sie:

- (a) Die Gruppe G ist charakteristisch einfach.
- (b) Die Gruppe G kann nicht als direktes Produkt von einfachen Gruppen geschrieben werden.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, sei $r \in \mathbb{N}$ und sei $G = \text{UT}_{r+1}(R) \leq \text{GL}_{r+1}(R)$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen über R mit Einträgen 1 auf der Diagonalen. Schreibe $I \in \text{Mat}_{r+1}(R)$ für die Einheitsmatrix, und $E_{i,j} \in \text{Mat}_{r+1}(R)$ für die Elementarmatrix mit Eintrag 1 in der (i, j) -Position und Einträgen 0 überall sonst. Zeigen Sie:

- (a) Für $k \in \{1, \dots, r+1\}$ gilt für den k ten Term der absteigenden Zentralreihe:

$$\gamma_k G = \langle I + aE_{i,j} \mid a \in R, 1 \leq i, j \leq r+1, j-i \geq k \rangle = \left\{ I + \sum_{j-i \geq k} a_{i,j} E_{i,j} \mid a_{i,j} \in R \right\}.$$

- (b) Die Gruppe G ist nilpotent der Klasse r .

- (c) Für $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\gamma_k G / \gamma_{k+1} G \cong R_+ \times \dots \times R_+,$$

mit $r-k+1$ Faktoren, die jeweils isomorph zur additiven Gruppe R_+ des Ringes sind.

Zusatz: Für das Zentrum von G gilt: $Z(G) = \gamma_r G = \{I + aE_{1,r+1} \mid a \in R\} \cong R_+$.

Aufgabe 8.3

Sei G eine Gruppe. Die *aufsteigende Zentralreihe* $1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$ ist rekursiv durch die Vorgaben $Z_0(G) = 1$ und $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ definiert. Zeigen Sie:

- (a) Jeder Term $Z_i(G)$ der aufsteigenden Zentralreihe ist eine charakteristische Untergruppe von G , und belegen Sie durch ein geeignetes Beispiel, dass $Z_i(G)$ im allgemeinen nicht vollständig invariant in G zu sein braucht.

- (b) Ist $c \in \mathbb{N}_0$ mit $Z_c(G) = G$, dann gilt $\gamma_{i+1} G \leq Z_{c-i}(G)$ für $i \in \{0, 1, \dots, c\}$.

- (c) Ist $c \in \mathbb{N}_0$ mit $\gamma_{c+1} G = 1$, dann gilt $\gamma_{c+1-j} G \leq Z_j(G)$ für $j \in \{0, 1, \dots, c\}$.

- (d) G ist nilpotent der Klasse c genau dann, wenn $1 = Z_0(G) \leq \dots \leq Z_c(G) = G$.