

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis zum 25.11.2019, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgaben 7.1 und 7.2 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 7.3 und 7.4 ab; weitere Informationen auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/.

Aufgabe 7.1

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q = p^{2m}$ Elementen, wobei $p = \text{char}(K) > 2$ sei. Sei $X = K \cup \{\infty\}$ die „projektive Gerade“ mit $q + 1$ Punkten. Die Abbildung $\sigma: K \rightarrow K$, $x \mapsto x^{p^m}$ stellt einen Körperautomorphismus der Ordnung 2 dar. Setze $\infty^\sigma = \infty$. Sei $M(q)$ die Menge aller Transformationen

$$\alpha: X \rightarrow X, \quad x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in K \text{ und } ad - bc \neq 0 \text{ ein Quadrat in } K,$$

und aller Transformationen

$$\alpha: X \rightarrow X, \quad x \mapsto \frac{ax^\sigma + b}{cx^\sigma + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in K \text{ und } ad - bc \text{ kein Quadrat in } K.$$

Setze $S(q) = \text{St}_{M(q)}(\infty)$. Zeigen Sie:

- (a) $M(q)$ bildet eine Untergruppe in $\text{Sym}(X)$.
- (b) Es ist

$$S(q) = \{ \alpha \in M(q) \mid \exists a, b \in K, a \neq 0 \text{ ein Quadrat in } K \forall x \in X : x^\alpha = ax + b \} \\ \cup \{ \alpha \in M(q) \mid \exists a, b \in K, a \text{ kein Quadrat in } K \forall x \in X : x^\alpha = ax^\sigma + b \}.$$

- (c) Die Gruppe $S(q)$ operiert scharf 2-transitiv auf K .
- (d) Die Gruppe $M(q)$ operiert scharf 3-transitiv auf X , insbesondere ist dann $|M(q)| = (q-1)q(q+1)$.

Bemerkung. Ähnliche Gruppen $L(q)$ wurden in Aufgabe 6.4 behandelt. Man kann zeigen: Zwischen den Familien von scharf 3-transitiven Gruppen $L(q)$ und $M(q)$ bestehen keine Isomorphismen. Weiter gilt nach einem Resultat von Zassenhaus: Jede scharf 3-transitive endliche Permutationsgruppe ist äquivalent zu einer der Gruppen $L(q)$ oder $M(q)$.

Aufgabe 7.2

Sei \mathbb{F} ein endlicher Körper der Charakteristik p , und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Gruppe $\text{UT}_n(\mathbb{F})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen 1 auf der Diagonalen eine Sylow- p -Untergruppe von $\text{GL}_n(\mathbb{F})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3

(4 Punkte)

(a) Sei $G \neq 1$ eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Sei $H \leq G$ mit $|G : H| = p$. Zeigen Sie: $H \trianglelefteq G$.

(b) Sei G eine endliche Gruppe, $K \trianglelefteq G$ und P eine Sylow- p -Untergruppe von K , zu einer Primzahl p . Der *Normalisator* von P in G ist die Gruppe $N_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$. Zeigen Sie: $G = N_G(P)K$.

(c) Sei G eine endliche Gruppe und P eine Sylow- p -Untergruppe von G , zu einer Primzahl p . Weiter sei P *subnormal* in G , d. h., es gelte

$$P \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq K_m = G$$

für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und Untergruppen $H_1, \dots, H_m \leq G$. Zeigen Sie: $P \trianglelefteq G$.

Bemerkung. Die Aussage in (b) ist als *Frattini-Argument* bekannt.

Aufgabe 7.4

(4 Punkte)

Sei $G \neq 1$ eine endlich erzeugte Gruppe. Zeigen Sie, unter Verwendung des Zornschen Lemmas: G besitzt einen maximalen Normalteiler $N \trianglelefteq G$, so dass G/N eine endlich erzeugte einfache Gruppe ist.

Bemerkung. Ist G eine endlich erzeugte Gruppe, die keine nicht-trivialen endlichen Faktorgruppen besitzt, so folgt die Existenz von endlich erzeugten, unendlichen einfachen Gruppen.