Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 6

Abgabe der Lösungen bis zum 18.11.2019, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen, vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 6.3 und 6.4 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Sei $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe; dabei gelte $X \neq \varnothing$. Die *G-Bahn* von $x \in X$ ist $\{x^\pi \mid \pi \in G\}$. Der *Stabilisator* (oder die *Isotropiegruppe*) von $x \in X$ ist $\mathrm{St}_G(x) = \{\pi \in G \mid x^\pi = x\} \leq G$. Die Permutationsgruppe G heißt *transitiv* auf X, falls es zu $x, y \in X$ stets ein $\pi \in G$ mit $x^\pi = y$ gibt. Die Gruppe G heißt *semi-regulär*, falls $\mathrm{St}_G(x) = 1$ für alle $x \in X$ ist. Ist G transitiv und semi-regulär, so heißt G eine *reguläre* Permutationsgruppe.
Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |X|$ bezeichne $X^{[k]}$ die Menge aller Tupel $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ mit paarweise verschiedenen Einträgen. Dann operiert G in natürlicher Weise auf $X^{[k]}$, d.h., wir erhalten einen Homomorphismus $G \to \mathrm{Sym}(X^{[k]})$, vermöge $(x_1, \ldots, x_k)^\pi = (x_1^\pi, \ldots, x_k^\pi)$ für $(x_1, \ldots, x_k) \in X^{[k]}$ und $\pi \in G$. Operiert G transitiv auf $X^{[k]}$, so heißt G eine *k-transitive* Permutationsgruppe. Operiert G regulär auf $X^{[k]}$, so heißt G *scharf k-transitiv*.

Aufgabe 6.1

Sei $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe; dabei gelte $X \neq \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) Sei $x \in X$. Dann liefert $\Phi\colon \mathrm{St}_G(x)\backslash G \to X$, $\mathrm{St}_G(x)\pi \mapsto x^\pi$ eine G-äquivariante Bijektion zwischen den Rechtsnebenklassen von $\mathrm{St}_G(x)$ in G und der G-Bahn von x. Äquivarianz bedeutet hierbei: $(\mathrm{St}_G(x)\pi \cdot \sigma)\Phi = (x^\pi)^\sigma = ((\mathrm{St}_G(x)\pi)\Phi)^\sigma$ für $\pi, \sigma \in G$. Insbesondere hat die G-Bahn von x die Länge $|G : \mathrm{St}_G(x)|$.

(b) Ist G transitiv, so gilt $|G| = |X||\mathrm{St}_G(x)|$ für alle $x \in X$.

(c) Ist G regulär, so gilt $|G| = |X|$, und die Wirkung von G auf X ist äquivalent zu der Wirkung von G auf sich per Rechtsmultiplikation, d.h., es gibt eine G-äquivariante Bijektion zwischen X und G (bzgl. Rechtsmultiplikation).

Aufgabe 6.2

Sei $G \leq \mathrm{Sym}(X)$ eine Permutationsgruppe; dabei gelte $X \neq \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in X$ und $\pi \in G$ gilt: $\mathrm{St}_G(x^\pi) = \mathrm{St}_G(x)^\pi = \pi^{-1}\mathrm{St}_G(x)\pi$.

(b) Ist G transitiv und abelsch, so ist G regulär.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ ist scharf n-transitiv.

(b) Sei $1 \leq k \leq n$, und $G \leq \mathrm{Sym}(n)$ eine k-transitive Permutationsgruppe. Dann teilt $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ die Ordnung $|G|$, und G ist scharf k-transitiv genau dann, wenn $|G| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ ist.

(c) Für $n \geq 3$ ist die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ scharf $(n-2)$-transitiv.

(d) Für $n \geq 3$ sind $\mathrm{Sym}(n)$ und $\mathrm{Alt}(n)$ die einzigen $(n-2)$-transitiven Permutationsgruppen vom Grad n.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper und $X = K \cup \{\infty\}$ die „projektive Gerade“ mit $q+1$ Punkten. Sei $L(q)$ die Gruppe aller *gebrochen linearen Transformationen*

$$\alpha : X \to X, \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in K \text{ und } ad-bc \neq 0.$$

(Hierbei werden die zweckmäßigen Rechenregeln $y+\infty = \infty$, $y/0 = \infty$, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$ etc. verwendet.) Setze $H(q) = \mathrm{St}_{L(q)}(\infty)$. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppe $L(q)$ ist isomorph zu $\mathrm{PGL}(2,K)$, insbesondere gilt $|L(q)| = (q-1)q(q+1)$.

(b) Es ist $H(q) = \{\alpha \in L(q) \mid \exists a,b \in K, a \neq 0 \, \forall x \in X : x^\alpha = ax+b\}$.

(c) Die Gruppe $H(q)$ operiert scharf 2-transitiv auf K.

(d) Die Gruppe $H(q)$ operiert (außer wenn $q=2$) nicht regulär auf K, aber jedes Element $\alpha \in H(q) \setminus \{\mathrm{id}_K\}$ hat höchstens einen Fixpunkt in K. Die Fixpunkt-freien Transformationen von $H(q)$ bilden zusammen mit id_X einen Normalteiler von $H(q)$.

(e) Die Gruppe $L(q)$ operiert scharf 3-transitiv auf X.

Bemerkung: Aufgabenteile (c) und (d) zeigen, dass $H(q) \leq \mathrm{Sym}(K)$ eine sogenannte *Frobenius-Gruppe* ist.

Aufgabe 6.5

Zeigen Sie: $\mathrm{PSL}(2,2) \cong \mathrm{Sym}(3)$, $\mathrm{PSL}(2,3) \cong \mathrm{Alt}(4)$ und $\mathrm{PSL}(2,4) \cong \mathrm{Alt}(5)$.

Zeigen Sie weiter: $\mathrm{PSL}(2,5) \cong \mathrm{Alt}(5)$.

(*Hinweis*: Betrachten Sie für $\mathrm{PSL}(2,3)$ und $\mathrm{PSL}(2,4)$ jeweils die natürliche Wirkung der Gruppe auf der projektiven Geraden. Arbeiten Sie für $\mathrm{PSL}(2,5)$ mit den Sylow-2-Untergruppen.)