Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 04.11.2019, 09.15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 4.1 und 4.3 ab. Die übrigen Aufgaben sind mündlich vorzubereiten; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Gruppen sich jeweils als halbdirektes Produkt von echten Untergruppen schreiben lassen:

(a) $\mathrm{Sym}(3)$, (b) D_8, (c) C_{15}, (d) Q_8.

Hierbei bezeichnet $Q_8 = \langle i, j \rangle$ mit $i^4 = 1$ und $i^2 = j^2 = [i, j]$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8; explizit kann $Q_8 \leq \mathrm{Sym}(8)$ durch $i = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$, $j = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$ erzeugt werden.

Zusatz: Was passiert für $\mathrm{Sym}(n)$ bzw. D_{2n} für allgemeine $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 4.2

(a) Fertigen Sie eine Liste aller Elemente der Gruppe $\mathrm{Alt}(4)$ und ihrer Ordnungen an.

(b) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{Alt}(4)$ lässt sich als halbdirektes Produkt von zwei echten Untergruppen schreiben. Bestimmen Sie die Ordnungen der beteiligten Untergruppen.

(c) Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Alt}(4)$ keine Untergruppe der Ordnung 6 enthält.

(*Hinweis*: Für Teil (c) dürfen Sie beispielsweise Aufgabe 3.4 benutzen.)

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen, alle Hauptreihen, alle charakteristischen Hauptreihen und alle vollinvarianten Hauptreihen für die Diedergruppe $G = D_{10}$.

Zusatz: Ist jede Untergruppe von D_{10} subnormal in D_{10}? Für welche Diedergruppen D_{2n}, $n \in \mathbb{N}$, ist jede Untergruppe von D_{2n} subnormal in D_{2n}?

Aufgabe 4.4

Sei G eine Gruppe mit Operatoren Ω. Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung: Eine Ω-Reihe für G ist eine Ω-Kompositionsreihe genau dann, wenn alle ihre Faktoren Ω-einfach sind.

Aufgabe 4.5

(a) Finden Sie ein Beispiel einer abelschen und einer nicht-abelschen Gruppe, die (inklusive Multiplizitäten) dieselben Kompositionsfaktoren haben.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ mit Kompositionsfaktoren C_5, C_7 und C_{13}. Zeigen Sie: $G \cong C_5 \times C_7 \times C_{13}$.