Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 28.10.2019, 09:15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgaben 3.2 bis 3.5 sind mündlich, ggf. mit Notizen vorzubereiten. Bitte geben Sie schriftliche Lösungen zu den Aufgaben 3.1 und 3.6 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D_8)$ der Diedergruppe D_8. Folgern Sie: $\mathrm{Inn}(D_8) \lneqq \mathrm{Aut}(D_8)$, aber $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$.

Aufgabe 3.2

Beschreiben Sie soweit wie möglich die Struktur der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D_{2n})$ der Diedergruppe D_{2n} für $n \geq 3$.
(*Hinweis*: Fangen Sie mit kleinen Werten $n \in \{3, 4, 5\}$ an und verwenden Sie den Ansatz aus der Vorlesung. Welche Ordnung hat $\mathrm{Aut}(D_{2n})$? Welche Normalteiler finden Sie? Ggf. welche Zerlegungen als halbdirektes Produkt?)

Aufgabe 3.3

Sei G eine endliche Gruppe. Die kleinste Anzahl von Elementen, aus denen sich G erzeugen lässt, sei mit $d(G)$ bezeichnet. Zeigen Sie: $d(G) \leq \log_2|G|$.

Zusatz: Lässt sich die Abschätzung, zumindest für hinreichend große $|G|$, noch verbessern?

Aufgabe 3.4

Seien H, K Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass $|HK||H \cap K| = |H| \cdot |K|$ ist. Folgern Sie: Ist zusätzlich $\mathrm{ggT}(|G:H|, |G:K|) = 1$, so gilt: $G = HK$.

Aufgabe 3.5

Sei p eine Primzahl, und sei G eine endliche abelsche Gruppe mit der Eigenschaft $x^p = 1$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie: G ist ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung p.

Bemerkung: Gruppen dieser Art heißen *endliche elementar-abelsche p-Gruppen*.

Aufgabe 3.6 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *subnormal* in G, i. Z. $H \lhd\lhd G$, falls es eine endliche aufsteigende Kette von Untergruppen $H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_k = G$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Jeder Subnormalteiler $H \lhd\lhd G$ ist bereits ein Normalteiler in G genau dann, wenn jeder Normalteiler eines Normalteilers von G ein Normalteiler von G ist.

(b) Finden Sie konkret eine Gruppe G und $H \lhd\lhd G$ mit $H \ntrianglelefteq G$.
(*Hinweis*: Untersuchen Sie $G = D_8$.)

(c) Finden Sie konkret eine Gruppe G und $H \leq G$, ohne dass $H \lhd\lhd G$ gilt.