Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2019/20

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 14.10.2019, 09:15 Uhr in der Pause der Vorlesung

Aufgaben 1.1 bis 1.6 sind Präsenzaufgaben für die ersten Übungsstunden. Bitte geben Sie Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben 1.7 und 1.8 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS1920/`.

Aufgabe 1.1

Sei G eine Gruppe, und es gelte $x^2 = 1$ für jedes Element $x \in G$. Zeigen Sie: G ist abelsch.

Aufgabe 1.2

Sei G eine endliche Gruppe und $|G|$ gerade. Zeigen Sie, dass G mindestens eine *Involution*, also ein Element der Ordnung 2 (d.h. ein Element $x \in G \smallsetminus \{1\}$ mit $x^2 = 1$) enthält.

Aufgabe 1.3

Sei G eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in G$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt $(xy)^m = x^m y^m$. Gilt diese Identität auch für nicht-abelsche Gruppen?

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass keine zwei der additiven Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ zueinander isomorph sind. (*Zusatz*: Sind die additiven Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ isomorph zueinander?)

Aufgabe 1.5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Realisieren Sie die Diedergruppe D_{2n} der Ordnung $2n$ (d.h. eine zu D_{2n} isomorphe Gruppe) als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$.

Aufgabe 1.6

Beweisen Sie den Satz von Wilson: Für jede Primzahl p gilt die Kongruenz $(p-1)! \equiv_p -1$. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Kongruenz als eine Gleichung in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ des Restklassenringes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.)

Aufgabe 1.7 (4 Punkte)

Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(X)$ abelsch ist genau dann, wenn $|X| \leq 2$ gilt.

Aufgabe 1.8 (4 Punkte)

(1) Beschreiben Sie die Elemente und die Verknüpfung in der Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(X)$ des metrischen Raumes $X = \mathbb{R}$ bzgl. des gewöhnlichen euklidischen Abstandes $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.
(*Hinweis*: Beschreiben Sie zunächst alle $\alpha \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ mit $0^\alpha = 0$; überlegen Sie hierzu, welche Werte 1^α für solche α annehmen kann. Können Sie am Ende eine Matrizengruppe angeben, die isomorph zu $\mathrm{Isom}(\mathbb{R})$ ist?)
(2) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe von $\mathbb{Z}$ als Teilmenge des metrischen Raumes $X = \mathbb{R}$ bzgl. des gewöhnlichen euklidschen Abstands.
(*Bemerkung*: Diese Gruppe heißt die unendliche Diedergruppe D_∞. Wieso?)