Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

# Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 7

Besprechung der Lösungen am 19.01.2023 in der Übung

Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_WS2223/`.

**Aufgabe 7.1** (4 Punkte)

(a) Prüfen Sie im Detail den in der Vorlesung skizzierten Beweis zu der Aussage: Eine rationale Zahl ist genau dann ganz, wenn sie ganzrational ist; also: $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ ganz}\} = \mathbb{Z}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Begründen Sie: $a$ ist genau dann ganz, wenn das Minimalpolynom $f = \mathrm{Minpol}_{\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}[X]$ von $a$ über $\mathbb{Q}$ bereits in $\mathbb{Z}[X]$ liegt.

(c) Sei $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Ganzheitsring von $K$.

(*Hinweis.* Offenbar liegt $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{d}$ im Ganzheitsring. Verwenden Sie nun (b), um zu klären, welche Elemente zusätzlich ganz sind. Dabei hilft es, die Fälle $d \equiv_4 1$ und $d \not\equiv_4 1$ zu unterscheiden.)

**Aufgabe 7.2** (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz von Landau: Für jede vorgegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt es – bis auf Isomorphie – nur endlich viele endliche Gruppen $G$ mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.

(*Hinweis.* Verwenden Sie die Klassengleichung

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(g_i)|,$$

wobei $g_1, \ldots, g_k$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen von $G$ bildet. Falls Sie die Klassengleichung nicht bereits kennen, üeberlegen Sie auch, warum diese richtig ist.)

(b) Bestimmen Sie für $k \in \{1, 2, 3\}$ jeweils alle endlichen Gruppen $G$ mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.