Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 2

Besprechung der Lösungen am Mittwoch, dem 08.05.2024

Aufgabe 2.1 ist eine Präsenzaufgabe. Gepunktet wird mit Aufgabe 2.2; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 2.1

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Für $a \in K$ bezeichne $|a|$ dasjenige Element von K, welches $|a| \geq 0$ und $|a|^2 = a^2$ erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Für $a, b \in K$ gelten $|ab| = |a|\,|b|$ und $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Zusatz. Wie erklärt man eine Topologie auf K, die mit den bereits vorhandenen Strukturen verträglich ist (Stichwort: topologischer Körper)? Ist K, mittels der „Abstandsfunktion“ $d(a, b) = |a - b|$ für $a, b \in K$, sogar ein metrischer Raum?

(b) Sei $f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n \in K[X]$ normiert vom Grad n, und setze

$$M = \max\Big\{1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\Big\}.$$

Dann gilt $|f(b)| > 0$ für jedes $b \in K$ mit $|b| > M$.

Folglich erfüllt jede Wurzel w von f in K die Bedingung $-M < w < M$.

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Bekanntlich ist dann $\operatorname{char}(K) = 0$, und wir betrachten $\mathbb{Q}$ als Teilkörper von K. Die Anordnung $\leq$ heißt *archimedisch*, falls das „archimedische Prinzip“ gilt: Für jedes $a \in K$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$. Zeigen Sie:

(a) Die Anordnung $\leq$ von K ist archimedisch genau dann, wenn $\mathbb{Q}$ dicht in K bzgl. $\leq$ liegt, d. h., zu $a, b \in K$ mit $a < b$ stets $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$ existiert.

(b) Ist K ein Zahlkörper, d. h., hat K endlichen Grad über $\mathbb{Q}$, so ist $\leq$ archimedisch.

(c) Der Körper $\mathbb{Q}(X) = \{f/g \mid f, g \in \mathbb{Q}[X],\ g \neq 0\}$ aller rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$ besitzt sowohl archimedische als auch nicht-archimedische Anordnungen.