Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Sommersemester 2024

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie: Angeordnete Körper – Blatt 1

Besprechung der Lösungen: Mi, 24.04.2024

Aufgaben 1.1 und 1.2 sind Präsenzaufgaben. Gepunktet wird mit Aufgabe 1.3; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AngeordneteKoerper_SS24/`.

Aufgabe 1.1

Zeigen Sie:

(a) Der Körper $\mathbb{Q}$ besitzt genau eine Anordnung.

(b) Der Teilkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ von $\mathbb{R}$ besitzt genau zwei verschiedene Anordnungen.

Aufgabe 1.2

Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und sei $P = P_{\leq} = \{a \in K \mid a \geq 0\}$ der zugehörige Ordnungskegel. Zeigen Sie, daß gelten:

(a) $P + P \subseteq P$ und $P \cdot P \subseteq P$,

(b) $P \cap -P = \{0\}$,

(c) $K = -P \cup P$,

(d) $\forall a, b \in K : a \leq b \leftrightarrow b - a \in P$.

Bemerkung. Die Aussage ist Lemma 1.2 der Vorlesung.

Aufgabe 1.3 (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $K = \{a/b \mid a, b \in R,\ b \neq 0\}$ ein Quotientenkörper zu R. Sei $T \subseteq R$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften

$$T + T \subseteq T, \quad T \cdot T \subseteq T, \quad T \cap -T = \{0\}, \quad R = -T \cup T.$$

Zeigen Sie: Es gibt genau eine Anordnung $\leq$ von K mit $T \subseteq P_{\leq}$; desweiteren gilt $P_{\leq} = \{a/b \mid a, b \in T,\ b \neq 0\}$.

Bemerkung. Für $R = \mathbb{R}[X]$ erfüllt zum Beispiel die Menge

$$T = \{0\} \cup \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n > 0 \right\}$$

die Vorgaben. Wie kann man sich die zugehörige Anordnung $\leq$ von dem Quotientenkörper $\mathbb{R}(X)$ vorstellen?