Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 12

Besprechung der Lösungen am 19.01.2022 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 12.1 und 12.3 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 12.2 und 12.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Durchweg bezeichne p eine Primzahl; der Einfachheit halber setzen wir $p > 2$ voraus. Mit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ bezeichnen wir die Riemannsche Zetafunktion, die bekanntlich für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert.

Aufgabe 12.1 (2 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $G = \{g \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{Z}_p) \mid g \equiv_p 1\}$. Wie üblich bezeichnet $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{Z}_p)$ das $\mathbb{Z}_p$-Liegitter aller $d{\times}d$-Matrizen über $\mathbb{Z}_p$, ausgestattet mit der gewöhnlichen $\mathbb{Z}_p$-Modulstruktur und der Kommutatorklammer $[a, b] = ab - ba$ für Matrizen a, b.

Zeigen Sie als Fortsetzung von Aufgabe 10.2 unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen: Das der uniform potenzreichen pro-p-Gruppe G zugeordnete $\mathbb{Z}_p$-Liegitter L_G ist kanonisch isomorph zu dem Lieuntergitter $p.\mathfrak{gl}_d(\mathbb{Z}_p)$ von $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{Z}_p)$.

Aufgabe 12.2

Verifizieren Sie im Detail: Auf folgende Weise ergibt sich eindeutig ein Funktor von der Kategorie der pro-p-Gruppen von endlichem Rang (mit stetigen Homomorphismen) in die Kategorie der $\mathbb{Q}_p$-Liealgebren (mit Liealgebrenhomomorphismen).

Zu einer pro-p-Gruppe G von endlichem Rang wählt man eine beliebige uniform potenzreiche offene Untergruppe $H \leq_{\mathrm{o}} G$ und weist G die Liealgebra $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} L_H$ zu. Abbildungen zwischen pro-p-Gruppen von endlichem Rang schränkt man geeignet auf uniform potenzreiche offene Untergruppen ein und setzt sie dann von den entsprechenden $\mathbb{Z}_p$-Liegittern linear auf die zugehörigen $\mathbb{Q}_p$-Liealgebren fort.

Aufgabe 12.3 (2 Punkte)

Für $k \in \mathbb{N}$ sind die arithmetischen Funktionen $\sigma_k, \tau_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ wie folgt definiert: $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, wobei sich die Summe über alle positiven Teiler d von n erstreckt, und $\tau_k(n)$ ist gleich der Anzahl der Produktdarstellungen $n = d_1 \cdots d_k$ von n in $\mathbb{N}$ mit genau k Faktoren, wobei die Reihenfolge der Faktoren zu beachten ist. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\sigma_0 = \varepsilon * \varepsilon$, wobei ε die konstante Funktion 1 darstellt, d. h., $\varepsilon(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(n) n^{-s} = \zeta(s)^2$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Ist $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so gilt $\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + p_i^k + \ldots + p_i^{ke_i})$. Insbesondere ist zwar die Funktion ε vollständig multiplikativ, aber σ_k ist es nicht.

(c) Für $\mathrm{Re}(s) > k + 1$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n) n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s - k)$.

(d) Es gilt $\tau_k = \varepsilon * \ldots * \varepsilon$ mit k Faktoren, insbesondere also $\tau_1 = \varepsilon$ und $\tau_2 = \sigma_0$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n) n^{-s} = \zeta(s)^k$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(e) Ist $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so gilt $\tau_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \binom{e_i + k - 1}{k - 1}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4

Für $n \in \mathbb{N}$ liefert die Eulersche Phi-Funktion die Anzahl $\varphi(n)$ der zu n teilerfremden Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, daß die Eulersche Phi-Funktion φ multiplikativ ist, und geben Sie eine Formel für $\varphi(n)$ in Abhängigkeit von der Primfaktorzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ an.

(b) Bekanntlich ist die Möbiusfunktion $\mu: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, gegeben durch: $\mu(n) = (-1)^r$, falls n quadratfrei mit r Primfaktoren ist, und $\mu(n) = 0$ für alle nicht-quadratfreien n. Ist μ multiplikativ bzw. sogar vollständig multiplikativ? Erläutern Sie, wieso $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \zeta(s)^{-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt.

(c) Die identische arithmetische Funktion $I: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $I(n) = n$ ist offenbar multiplikativ. Zeigen Sie: $\varphi = \mu * I$, d. h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$.

(*Hinweis*: Begründen Sie zunächst, warum beide Funktionen multiplikativ sind. Nun genügt es, die Gleichheit auf Primzahlpotenzen nachzuweisen.)

Folgern Sie: $I = \varphi * \varepsilon$, d. h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

(d) Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \zeta(s-1)/\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 2$. Folgern Sie: Die (absolute) Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s}$ ist gleich 2.