Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 11

Besprechung der Lösungen bereits am 20.12.2021 (Tausch mit Vorlesung)

Bitte bereiten Sie Aufgaben 11.1 und 11.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 11.3 und 11.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`
Durchweg bezeichne p eine Primzahl.

Aufgabe 11.1 (2 Punkte)
Sei G eine uniform potenzreiche pro-p Gruppe mit absteigender p-Reihe G_i, $i \in \mathbb{N}$. Für $x, y \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ sollen definiert werden $[x,y]'_n = [x^{p^n}, y^{p^n}]^{p^{-2n}}$, und anschließend

$$[x,y]_{\mathrm{Lie}} = \lim_{n\to\infty} [x,y]'_n.$$

Zeigen Sie:
(a) Es gilt $[x^{p^n}, y^{p^n}] \in G_{2n+2}$; somit besitzt $[x^{p^n}, y^{p^n}]$ eine eindeutige p^{2n}te Wurzel in G.
(b) Für $n \geq 2$ und $u, v \in G_n$ gelten:

$$[xu, yv]'_n \equiv [x,y]'_n \equiv [x,y]'_{n-1} \qquad \text{modulo } G_{n+1}$$

und für $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ daher $[x,y]'_m \equiv_{G_{n+2}} [x,y]'_n$.
(c) Die Folge $([x,y]'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge und konvergiert somit in G.

Aufgabe 11.2 (2 Punkte)
Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 11.1 bzw. wie in §7 der Vorlesung. Zeigen Sie:
(a) Es gilt $[x,y]_{\mathrm{Lie}} = -[y,x]_{\mathrm{Lie}}$.
(b) Für $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \equiv_{p^n} a$ gilt $[\lambda.x, y]_{\mathrm{Lie}} \equiv_{G_{n+1}} [a.x, y]_{\mathrm{Lie}}$.
(c) Für jedes weitere Element $z \in G$ gilt

$$([x,z]'_n +_n [y,z]'_n)^{p^n} = [x^{p^n}, z^{p^n}]^{p^{-n}} [y^{p^n}, z^{p^n}]^{p^{-n}} \equiv_{G_{2n+3}} [x^{p^n} y^{p^n}, z^{p^n}]^{p^{-n}} = ([x +_n y, z]'_n)^{p^n},$$

und folglich $[x,z]'_n +_n [y,z]'_n \equiv_{G_{n+3}} [x +_n y, z]'_n$.
(d) Für den $\mathbb{Z}_p$-Modul $(G,+)$ ist die Klammer-Abbildung $[\cdot,\cdot]_{\mathrm{Lie}} \colon G \times G \to G$ bilinear.

Aufgabe 11.3
(a) Seien G eine Gruppe und $X = \{x_1, \dots, x_r\} \subseteq G$ eine endliche, unter Konjugation abgeschlossene Teilmenge, die aus Elementen x_i endlicher Ordnung besteht.
Zeigen Sie: Die von X erzeugte Untergruppe $\langle X \rangle$ ist endlich.
Hinweis. Betrachten Sie zu $g \in \langle X \rangle$ eine Darstellung $g = x_{i_1}^{e_1} \cdots x_{i_\ell}^{e_\ell}$, mit $1 \leq i_1, \dots, i_\ell \leq r$ und $e_1, \dots, e_\ell \in \mathbb{Z}$, von minimaler Länge $\ell \in \mathbb{N}_0$ so, daß $(i_1, \dots, i_\ell)$ kleinst möglich bzgl. der lexikographischen Ordnung auf $\{1, \dots, r\}^\ell$ ausfällt. Überlegen Sie sich: In dieser Situation sind $i_1, \dots, i_\ell$ bereits paarweise verschieden.
(b) Sei G eine pro-endliche Gruppe von endlichem Rang. Zeigen Sie: Es gibt in G einen eindeutig bestimmten $\subseteq$-maximalen endlichen Normalteiler $\pi(G)$.
Bemerkung. Wir nennen $\pi(G)$ das *periodische Radikal* von G.
(c) Seien G eine pro-endliche Gruppe von endlichem Rang und $H \leq_{\mathrm{abg}} G$. Zeigen Sie: Sofern $H \trianglelefteq G$ oder $H \leq_{\mathrm{off}} G$ ist, gilt $\pi(H) \subseteq \pi(G)$; aber im allgemeinen kann $\pi(H) \nsubseteq \pi(G)$ nicht ausgeschlossen werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4

Die *Nottingham-Gruppe* (über $\mathbb{F}_p$) ist die Gruppe $\mathcal{N}$ aller formalen Potenzreihen

$$\boldsymbol{a} = t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \ldots \in \mathcal{N} = t + t^2 \mathbb{F}_p[[t]]$$

mit der Verknüpfung

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}(t)) = t + (a_1 + b_1)t^2 + (a_2 + 2a_1 b_1 + b_2)t^3 + (a_3 + 3a_2 b_1 + a_1 b_1^2 + 2a_1 b_2 + b_3)t^4 + \ldots$$

für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{N}$.

(a) Verifizieren Sie, daß $\mathcal{N}$ tatsächlich eine Gruppe ist, mit neutralem Element t.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\boldsymbol{e}_i = t + t^{i+1} \in \mathcal{N}$. Überprüfen Sie, für $i, j \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{e}_i^{\lambda} \equiv_{t^{i+2}} t + \lambda t^{i+1}, \qquad \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j \equiv_{t^{i+j+1}} \boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_i, \qquad [\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j] \equiv_{t^{i+j+2}} \boldsymbol{e}_{i+j}^{i-j}.$$

(c) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{N}_n = \{\boldsymbol{a} \in \mathcal{N} \mid \boldsymbol{a} \equiv_{t^{n+1}} t\}$ ein Normalteiler von $\mathcal{N}$ mit $|\mathcal{N} : \mathcal{N}_n| = p^{n-1}$. Zusätzlich gilt $\mathcal{N}_n = \langle \boldsymbol{e}_n \rangle \mathcal{N}_{n+1}$.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Gamma_n = \mathcal{N}/\mathcal{N}_n$ und $e_i = \boldsymbol{e}_i \mathcal{N}_n \in \Gamma_n$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Jede Elemente aus Γ_n kann eindeutig als $g = e_1^{\lambda_1} \ldots e_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ mit $\lambda_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ geschrieben werden.

(e) Zeigen Sie: Bzgl. der von $\mathbb{F}_p[[t]]$ induzierten Topologie ist $\mathcal{N}$ ist eine pro-p-Gruppe, und es gilt $\mathcal{N} = \overline{\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle}$.

(f) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathcal{N}$ operiert treu durch stetige Automorphismen auf dem topologischen Ring $\mathbb{F}_p[[t]]$, mittels: $f^{\boldsymbol{a}} = f(\boldsymbol{a}(t))$ für $f \in \mathbb{F}_p[[t]]$ und $\boldsymbol{a} \in \mathcal{N}$.

(g) Zeigen Sie: Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\boldsymbol{e}_i^p \equiv_{t^{2i+1}} t$.

Hinweis. Beschreiben Sie gemäß (f) die Wirkung von $\boldsymbol{e}_i$ auf $\mathbb{F}_p[[t]]/t^{2i+1}\mathbb{F}_p[[t]]$ durch eine Matrix bzgl. der $\mathbb{F}_p$-Basis mit den Restklassenvertretern $t, t^2, \ldots, t^{2i}$.

(h) Ist $\mathcal{N}$ potenzreich? Ist der Rang von $\mathcal{N}$ endlich?

Hinweis. Untersuchen Sie die Faktorgruppen $\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{2n}$ für wachsendes $n \in \mathbb{N}$.