Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 10

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 15.12.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 10.1 und 10.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 10.3 und 10.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`
Durchweg bezeichne p eine Primzahl.

Aufgabe 10.1 (2 Punkte)

Seien

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k/k! \qquad \text{und} \qquad \log(1+X) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} X^k/k$$

die Exponential- und Logarithmusreihe in $\mathbb{Q}[[X]]$. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $v_p(n!) \le n/(p-1)$; folglich konvergiert $\exp(x)$ für alle $x \in p\mathbb{Z}_p$, falls $p > 2$, bzw. für $x \in 4\mathbb{Z}_2$, falls $p = 2$ ist.

(b) Die Reihen vermitteln zueinander inverse Homöomorphismen zwischen $p\mathbb{Z}_p$ und $1+p\mathbb{Z}_p$ bzw. $4\mathbb{Z}_2$ und $1+4\mathbb{Z}_2$. Für $p > 2$ vermitteln die Reihen Isomorphismen zwischen den tologischen Gruppen $(p\mathbb{Z}_p, +)$ und $(1+p\mathbb{Z}_p, \cdot)$.

(c) In $\mathbb{Q}[[X]]$ gelten 'formal' $\exp(\log(1+X)) = 1+X$ und $\log(\exp(X)) = X$.

(d) In $\mathbb{Q}_2$ gilt $\log(-1) = 0 = \log(1)$ und damit $\exp(\log(-1)) = 1 \ne -1$.

Zusatz. Sei $\mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ die vervollständigte freie assoziative $\mathbb{Q}$-Algebra mit zwei Erzeugenden X, Y; die Elemente von $\mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ sind also formale Potenzreihen über $\mathbb{Q}$ in nicht-kommutierenden Variablen X, Y. Leiten Sie die klassische Lieproduktformel her:

$$\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty} \big(\exp(X/n)\exp(Y/n)\big)^n.$$

Aufgabe 10.2 (2 Punkte)

Der Einfachheit halber setzen wir zusätzlich $p > 2$ voraus. Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $G_0 = \mathsf{GL}_d(\mathbb{Z}_p)$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $G_i = \{g \in G \mid g \equiv_{p^i} 1\} \trianglelefteq G_0$, die $i$te Hauptkongruenzuntergruppe von G_0; speziell sei $G = G_1$. Zeigen Sie:

(a) Über die Inklusionsabbildung $G_0 \subseteq \mathrm{Mat}_d(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{d^2}$ erhält G_0 die Struktur einer proendlichen Gruppe; es ist $G \trianglelefteq_{\mathrm{off}} G_0$ und $|G_0 : G_1| = p^{d(d-1)/2} \prod_{k=1}^{d}(p^k - 1)$.

(b) Die Gruppe G ist eine uniform potenzreiche pro-p-Gruppe mit absteigender p-Reihe G_i, $i \in \mathbb{N}$, und hat die Dimension $\dim(G) = d^2$.

(c) Die in Aufgabe 10.1 betrachteten Exponential- und Logarithmusreihen vermitteln zueinander inverse Homöomorphismen zwischen $p\mathrm{Mat}_d(\mathbb{Z}_p)$ und G.

(d) Der der uniform potenzreichen Gruppe G wie in der Vorlesung besprochen zugeordnete $\mathbb{Z}_p$-Modul ist kanonisch isomorph zu $\log(G) = p.\mathrm{Mat}_d(\mathbb{Z}_p)$, ausgestattet mit der gewöhnlichen Matrizenaddition; vgl. (c).

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3

Sei G eine proendliche Gruppe und $A = \mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe aller topologischen Automorphismen von G. Die *Kongruenztopologie* auf A hat als Basis die Menge aller Nebenklassen der Untergruppen

$$A_N = \{\alpha \in A \mid N\alpha = N \text{ und } \alpha \text{ induziert die Identität auf } G/N\}, \quad N \trianglelefteq_{\mathrm{off}} G.$$

Zeigen Sie:

(a) Bezüglich der Kongruenztopologie ist A eine hausdorffsche topologische Gruppe.

(b) Ist G eine endlich erzeugte proendliche Gruppe, so ist A eine proendliche Gruppe.

(c) Ist G eine endlich erzeugte pro-p-Gruppe, so ist $A_{\Phi(G)} \trianglelefteq_{\mathrm{off}} A$ eine pro-p-Gruppe.

Zusätze. (i) Finden Sie eine proendliche Gruppe G, für die $A = \mathrm{Aut}(G)$ keine proendliche Gruppe ist.
(ii) Zeigen Sie durch geeignete Beispiele, daß in (b) bzw. (c) die Gruppe A bzw. $A_{\Phi(G)}$ im allgemeinen nicht endlich erzeugt sein muß.

Aufgabe 10.4

(a) Sei G eine pro-endliche Gruppe. Zeigen Sie: Erfüllt G die aufsteigende Kettenbedingung für abgeschlossene Untergruppen, so ist jede abgeschlossene Untergruppe von G endlich erzeugt.

(b) Zeigen Sie: Ist G eine pro-p-Gruppe, so gilt auch die Umkehrung der Aussage in (a). Belegen Sie durch ein konkretes Beispiel, daß die Umkehrung für pro-endliche Gruppen im allgemeinen jedoch nicht gilt.