Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 9

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 08.12.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 9.1 und 9.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 9.3 und 9.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`
Durchweg bezeichne p eine Primzahl.

Aufgabe 9.1 (2 Punkte)

Sei G eine pro-p Gruppe. Zeigen bzw. folgern Sie:

(a) Für $N \trianglelefteq_{\text{off}} G$ gilt $N \leq_{\text{p.e.}} G$ genau dann, wenn $NK/K \leq_{\text{p.e.}} G/K$ für alle $K \trianglelefteq_{\text{off}} G$ ist.

(b) Die Gruppe G ist potenzreich genau dann, wenn G isomorph zu dem inversen Limes potenzreicher endlicher p-Gruppen bzgl. surjektiver Verbindungshomomorphismen ist.

Zusatz. Gilt die Aussage in (b) auch dann noch, wenn die Surjektivität der Verbindungshomomorphismen nicht zwingend eingefordert wird?

Aufgabe 9.2 (2 Punkte)

Sei G eine pro-p-Gruppe von endlichem Rang, und sei $H \leq_{\text{abg}} G$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte $G_n = \overline{G^{p^n}} \trianglelefteq_{\text{off}} G$ und entsprechend $H_n = \overline{H^{p^n}} \trianglelefteq_{\text{off}} H$.

(a) Zeigen Sie: Es exisitieren $d_G, d_H \in \mathbb{N}_0$ mit $d_G, d_H \leq \text{rk}(G)$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_p |G : G_n|}{n} = d_G \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_p |H : H_n|}{n} = d_H.$$

(b) Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von H und G, mit:

$$H_n \subseteq H \cap G_n \subseteq H_{n-c} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq c.$$

(c) Folgern Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_p |HG_n : G_n|}{\log_p |G : G_n|} = \frac{d_H}{d_G} \in \left\{0, \frac{1}{d_G}, \frac{2}{d_G}, \ldots, \frac{d_G - 1}{d_G}, 1\right\}.$$

Aufgabe 9.3

Die pro-endliche Gruppe G sei stark vollständig, d. h., jede Untergruppe von endlichem Index in G sei bereits offen in G. Zeigen bzw. erläutern Sie:

(a) Jeder (abstrakte) Homomorphismus von G in eine pro-endliche Gruppe ist stetig.

(b) Jede topologisch charakteristische Untergruppe von G ist bereits charakteristisch.

Aufgabe 9.4

Sei $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_d \rangle$ eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Zeigen Sie, per Induktion nach der Nilpotenzklasse von Γ, für die Kommutatoruntergruppe:

$$[\Gamma, \Gamma] = \{[x_1, \gamma_1][x_2, \gamma_2] \cdots [x_d, \gamma_d] \mid x_1, x_2, \ldots, x_d \in \Gamma\}.$$