Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 7

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 24.11.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 7.1 und 7.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 7.3 und 7.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Aufgabe 7.1 (2 Punkte)

Sei K, mittels $v\colon K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ein kompletter (diskret) bewerteter Körper, und sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ der Bewertungsring. Sei $f \in \mathcal{O}[X]$ ein Polynom und $a_0 \in \mathcal{O}$ mit $v(f(a_0)) > 2v(f'(a_0))$. Zeigen Sie: Dann existiert genau ein $a \in \mathcal{O}$ mit $f(a) = 0$ und $v(a - a_0) > v(f'(a_0))$.

Aufgabe 7.2 (2 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{P}$. Die absteigende p-Reihe einer Gruppe G ist rekursiv definiert durch $P_1(G) = G$ und $P_{i+1}(G) = P_i(G)^p[P_i(G), G]$ für $i \geq 1$.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $P_i(G)$ eine Wortuntergruppe von G, insbesondere also vollinvariant in G.

(b) Zeigen Sie: Für $i, j \in \mathbb{N}$ gilt stets $[P_i(G), P_j(G)] \subseteq P_{i+j}(G)$.

(c) Sei $d = d(G) < \infty$. Finden Sie für $i \in \mathbb{N}$ eine endliche obere Schranke für $|G : P_i(G)|$.

(d) Sei $d = d(G) < \infty$. Zeigen Sie: $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G/P_i(G)$ ist kanonisch isomorph zu der pro-p-Vervollständigung der Gruppe G.

Aufgabe 7.3

Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p > 2$, und sei v_p die p-adische Bewertung.

(a) Zeigen Sie: $v_p(n!) \leq (n-1)/(p-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie aus (a), daß $\exp(x) = \sum_{n=0} x^n/n!$ für alle $x \in p\mathbb{Z}_p$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie: Die Exponentialabbildung liefert einen Isomorphismus zwischen topologischen Gruppen von der additiven Gruppe $p\mathbb{Z}_p$ auf die multiplikative Gruppe $1 + p\mathbb{Z}_p$ der sogenannten 1-Einheiten in $\mathbb{Z}_p$.

Zusatz. Wie können die Überlegungen für $p = 2$ angepaßt werden?

Aufgabe 7.4

(a) Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ und Bewertungsideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_K$. Sei $U = \mathcal{O}^\times$ die Einheitengruppe von $\mathcal{O}$ und, für $i \geq 1$, sei $U_i = 1 + \mathfrak{p}^i \leq U$. Der Restklassenkörper von K sei isomorph zu $\mathbb{F}_q$ mit Primzahlpotenz $q = p^r$.

Zeigen Sie: $U/U_1 \cong C_{q-1}$ und $U_i/U_{i+1} \cong C_p^r$ für $i \geq 1$. Folgern Sie: U ist virtuell eine pro-p-Gruppe.

(b) Bestimmen Sie, für $p \in \mathbb{P}$, möglichst genau die multiplikativen Einheitengruppen der diskreten Bewertungsringe $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{F}_p[[t]]$. Zeigen Sie insbesondere: $\mathbb{Z}_p^\times \not\cong \mathbb{F}_p[[t]]^\times$.