Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 6

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 17.11.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 6.1 und 6.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 6.3 und 6.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Aufgabe 6.1 (2 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^d$, ausgestattet mit der lexikographischen Ordnungsrelation.

Zeigen Sie: Für $d \geq 2$ läßt sich Γ als geordnete Gruppe nicht in die additive Gruppe $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Standardordnung, einbetten.

Aufgabe 6.2 (2 Punkte)

Sei K ein bewerteter Körper mit Bewertungsabbildung $v\colon K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$d\colon K \times K \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad d(a,b) = 2^{-v(b-a)}$$

ist eine Abstandsfunktion für K und vermittelt somit eine Topologie auf K. Weiter gilt die *starke Dreiecksungleichung* $d(a,c) \leq \max\{d(a,b), d(b,c)\}$ für alle $a,b,c \in K$.

(b) Zeigen Sie: Die Körperaddition, -subtraktion, -multiplikation und -division liefern stetige Abbildungen $K \times K \to K$ bzw. $K \times K^* \to K$.

Bemerkung. Man sagt kurz, K sei ein *topologischer Körper*.

(c) Sei $w\colon K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine weitere Bewertungsabbildung für K. Zeigen Sie: v und w sind äquivalent, d. h., sie vermitteln dieselbe Topologie auf K, genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\forall a \in K : w(a) = \lambda v(a)$.

Aufgabe 6.3

Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K dergestalt, daß für $a \in K \smallsetminus \{0\}$ stets $a \in R$ oder $a^{-1} \in R$ gilt. Man sagt, R sei ein (abstrakter) *Bewertungsring*.

(a) Zeigen Sie: $\Gamma = K^\times / R^\times$ ist bezüglich

$$[a] +_\Gamma [b] =_{\mathrm{def}} [ab] \qquad \text{und} \qquad [a] \leq_\Gamma [b] \quad \leftrightarrow_{\mathrm{def}} \quad a^{-1}b \in R$$

eine geordnete abelsche Gruppe.

(b) Zeigen Sie: K ist ein bewerteter Körper bezüglich der Bewertungsabbildung $v\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$, $a \mapsto [a]$ für $a \neq 0$ und $0 \mapsto \infty$, wobei Γ wie in (a) definiert sei.

(c) Bestimmen Sie alle Bewertungsringe mit Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ und beschreiben Sie möglichst konkret die induzierten Bewertungsabbildungen.

Hinweis. Betrachten Sie Elemente der Form $p^{-1}q$ für Primzahlen p, q, um zu klären, welche Primzahlen in einem derartigen Bewertungsring invertierbar sein müssen.

Bemerkung. Die vollständige Beschreibung der (nicht-archimedischen) Bewertungsabbildungen auf $\mathbb{Q}$ ist Teil des sogenannten Satzes von Ostrowski.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4

Sei K ein bewerteter Körper mit Bewertungsabbildung $v: K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Betrachten Sie K als topologischen Körper, mittels der von v induzierten Abstandsfunktion. Zeigen Sie:

(a) Jede konvergente Folge in K ist auch eine Cauchy-Folge.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, so ist $(v(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) Jede Cauchy-Folge in K ist beschränkt, d. h., die Folgenglieder haben uniform beschränkten Abstand von 0.

(d) Eine Cauchy-Folge in K konvergiert gegen 0, sobald sie eine Teilfolge besitzt, welche gegen 0 konvergiert,

Bemerkung. Diese Aussagen sind hilfreich für den in der Vorlesung skizzierten, aber nicht im Detail ausgeführten Nachweis dafür, daß K eine komplette Hülle besitzt, die bis auf Isomorphie eindeutig ist. Als weitere Aufgabe, könnten Sie versuchen, diesen Beweis nun möglichst vollständig zu führen . . .