Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 5

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 10.11.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 5.1 und 5.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 5.3 und 5.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Aufgabe 5.1 (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei L eine R-Liealgebra. Eine *R-Derivation* $\delta\colon L \to L$ ist eine R-lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$[a,b]\delta = [a\delta, b] + [a, b\delta] \quad \text{für alle } a, b \in L.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathrm{Der}_R(L)$ aller R-Derivationen von L nach L in natürlicher Weise selbst eine R-Liealgebra mit Lieklammer $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\delta_b\colon L \to L$, $a \mapsto [a,b]$, für jedes $b \in L$ eine R-Derivation liefert und daß

$$L \to \mathrm{Der}_R(L), \quad b \mapsto \delta_b,$$

einen Homomorphismus von R-Liealgebren darstellt.

(c) Seien $\delta \in \mathrm{Der}_R(L)$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Leiten Sie die Leibniz-Formel her:

$$[a,b]\delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [a\delta^{k-j}, b\delta^j] \quad \text{für alle } a, b \in L.$$

(d) Sei nun $R = \mathbb{Q}$, und seien $a \in L$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x\delta_a^n = [x, a, \ldots, a] = 0$ für alle $x \in L$, wobei in der Lieklammer n Faktoren a stehen. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\alpha_a = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\delta_a^k \colon L \to L, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}[x, \underbrace{a, \ldots, a}_{k}],$$

liefert einen Automorphismus der Liealgebra L.

Aufgabe 5.2 (2 Punkte)

Sei Γ eine Gruppe, und seien

$$G = \varprojlim_{\Delta \in \mathfrak{N}} \Gamma/\Delta \quad \text{mit } \mathfrak{N} = \{\Delta \mid \Delta \trianglelefteq \Gamma \text{ und } |\Gamma : \Delta| < \infty\}$$

die pro-endliche Vervollständigung sowie $\vartheta\colon \Gamma \to G$ der kanonische Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $\Delta \in \mathfrak{N}$ vermittelt ϑ einen Isomorphismus $\Gamma/\Delta \to G/\overline{\Delta\vartheta}$.

(b) Zeigen Sie: ϑ vermittelt eine natürliche Bijektion $\mathrm{E} \mapsto \overline{\mathrm{E}\vartheta}$ zwischen den Untergruppen von endlichem Index in Γ und den offenen Untergruppen von G.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.3

Sei G eine pro-endliche Gruppe, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n(G) = \#\{H \leq_{\mathrm{off}} G \mid |G : H| = n\}$ die Anzahl der offenen Untergruppen vom Index n.

Zeigen Sie: Ist $a_n(G) < \infty$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, so gilt bereits $a_n(G) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.4

Sei $\Gamma = \mathbb{Z}^d$ eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang d. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n = a_n(\Gamma) = \#\{\Delta \leq \Gamma \mid |\Gamma : \Delta| = n\}$ und $s_n = s_n(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(a) Zeigen Sie: Hat $n \in \mathbb{N}$ die Primfaktorzerlegung $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$, so gilt $a_n = \prod_{i=1}^{r} a_{p_i^{e_i}}$.

(b) Sei nun $d = 2$. Bestimmen Sie explizit eine Formel für a_{p^k}, wobei $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ sind. Versuchen Sie, eine möglichst gute obere Schranke der Form n^α für s_n als Funktion von n zu finden.

(c) Sei nun $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Bestimmen Sie explizit eine Formel für a_{p^k}, wobei $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ sind. Versuchen Sie, eine möglichst gute obere Schranke der Form n^α für s_n als Funktion von n zu finden.

Hinweis. Für die Abschätzung von s_n in (b) und (c) benötigen Sie Informationen, die die Verteilung der Primzahlen betreffen. Ihre Antwort muß daher nicht optimal ausfallen.