Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2021–22

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 2

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 20.10.2021 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 2.1 und 2.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 2.3 und 2.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Aufgabe 2.1 (2 Punkte)

Eine Gruppe G heißt *metabelsch*, falls es ein $N \trianglelefteq G$ dergestalt gibt, daß sowohl N als auch G/N abelsch sind.

(a) Ist jede endlich erzeugte metabelsche Gruppe nilpotent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, daß in beliebigen Gruppen die „alternative Hall-Witt-Identität“ gilt:

$$[x,y,z^x][z,x,y^z][y,z,x^y] = 1 \qquad \text{für beliebige Gruppenelemente.}$$

(c) Zeigen Sie, daß in metabelschen Gruppen eine „vereinfachte Hall-Witt-Identität“ gilt:

$$[x,y,z][y,z,x][z,x,y] = 1 \qquad \text{für beliebige Gruppenelemente } x,y,z.$$

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Sei G eine nilpotente Gruppe und $H \leq G$ mit $G = H[G,G]$. Beweisen Sie: $G = H$.

Aufgabe 2.3

Die von allen nilpotenten Normalteilern einer Gruppe G erzeugte Untergruppe

$$\mathrm{Fitt}(G) = \langle x \mid x \in N \trianglelefteq G \text{ mit } N \text{ nilpotent} \rangle \trianglelefteq G$$

heißt die *Fitting(unter)gruppe* von G.

(a) Zeigen Sie: Sind $A, B \trianglelefteq G$ nilpotente Normalteiler einer Gruppe G von Nilpotenzklasse a bzw. b, so ist $AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\} \trianglelefteq G$ ein nilpotenter Normalteiler von Nilpotenzklasse höchstens $a+b$.

(b) Folgern Sie: In einer endlichen Gruppe G ist $\mathrm{Fitt}(G)$ stets nilpotent.

(c) Geben Sie eine (unendliche) Gruppe an, deren Fittinguntergruppe nicht nilpotent ist. Finden Sie sogar eine endlich erzeugte (unendliche) Gruppe, deren Fittinguntergruppe nicht nilpotent ist?

Aufgabe 2.4

(a) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(G)$ und die Faktorgruppe $G/Z(G)$ für die Gruppe $G = \langle x, y \mid x^y = x^{-1} \rangle$. Folgern Sie: G ist torsionsfrei, aber $G/Z(G)$ ist nicht torsionsfrei.

(b) Zeigen Sie: Ist G eine torsionsfreie nilpotente Gruppe, so ist auch $G/Z(G)$ torsionsfrei.

Hinweis. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Nutzen Sie für den Fall, daß $G/Z(G)$ nicht torsionsfrei ist, Resultate aus der Vorlesung um ein Element $z \in G$ zu finden, das modulo $Z(G)$ ein nicht-triviales zentrales Torsionselement von $G/Z(G)$ liefert. Verwenden Sie sodann eine Identität aus Aufgabe 1.1, um den gesuchten Widerspruch herzuleiten.