Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 1

Besprechung der Aufgaben in Präsenz am 13.10.2021 in der Übungsstunde

Dieses erste Blatt enthält einige Präsenzaufgaben für die erste Übungsstunde; alle Informationen zur Veranstaltung befinden sich auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2122/`

Aufgabe 1.1

Sei G eine Gruppe. Verifizieren Sie für $x, y \in G$ die Identitäten

$$[xy, z] = [x, z]^y\,[y, z], \qquad [x, yz] = [x, z]\,[x, y]^z$$

und folgern Sie per Induktion, für $n \in \mathbb{N}$:

$$[x^n, y] = [x, y]^{x^{n-1}}\,[x, y]^{x^{n-2}} \cdots [x, y]^x\,[x, y], \qquad [x, y^n] = [x, y]\,[x, y]^y \cdots [x, y]^{y^{n-2}}\,[x, y]^{y^{n-1}}.$$

Aufgabe 1.2

Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist eine charakteristische Untergruppe, also invariant unter Automorphismen von G, die Kommutatorgruppe $[G, G]$ ist sogar vollinvariant, also invariant unter beliebigen Endomorphismen von G. Warum eigentlich?

Zeigen Sie: Das Zentrum der Gruppe $G = C_3 \times \mathrm{Sym}(3)$ ist *nicht* vollinvariant in G.

Gibt es sogar eine endliche nilpotente Gruppen G dergestalt, daß $Z(G)$ nicht vollinvariant in G ist?

Aufgabe 1.3

Eine Gruppe G besitzt eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathcal{E}$ *virtuell*, wenn es eine Untergruppe $H \le G$ mit $|G : H| < \infty$ gibt, die ihrerseits die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt. Die Gruppe G besitzt die Eigenschaft $\mathcal{E}$ *residuell*, falls es zu $1 \ne x \in G$ stets ein $N \trianglelefteq G$ mit $x \notin N$ und dergestalt gibt, daß G/N die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt.

Welche der folgenden Gruppen sind nilpotent, virtuell nilpotent bzw. residuell nilpotent?

- die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$,
- die unendliche Diedergruppe D_∞,
- die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
- die Gruppe $\mathrm{AGL}_1(\mathbb{Q})$ aller invertierbaren affinen linearen Transformationen
$$T_{a,b} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a \ne 0),$$
- die Gruppe $M \ltimes A$, wobei $M = \langle 1 + \sqrt{2} \rangle \le \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ ist, $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ als additive Gruppe betrachtet wird, und die Konjugation von M auf A durch Multiplikation in dem Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ erklärt ist: $a^x = a \cdot x$ für $a \in A$ und $x \in M$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 1.4

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine endliche Gruppe, die keinen eindeutigen $\subseteq$-maximalen abelschen Normalteiler besitzt.[1]

(b) Zeigen Sie: In jeder endlichen Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Normalteiler $N \trianglelefteq G$, der $\subseteq$-minimal ist bezüglich der Eigenschaft „G/N ist nilpotent“.[2]

[1] Bem.: Zur absteigenden Kommutatorreihe gibt es also kein natürliches „aufsteigendes“ Gegenstück.
[2] Zusatz: Gilt eine entsprechende Aussage auch für unendliche Gruppen?