

# Analysis II

## Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

### Übungsblatt 12

Ausgabe: Di., 18.01.2022, 14:00 Uhr  
Abgabe: Di., 25.01.2022, 16:20 Uhr  
Besprechung: Mi., 26.01.2022 bzw. Do., 27.01.2022

ⓑ **Aufgabe 12.1:** (Distanzfunktional, 6 Punkte)

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sei  $\text{dist}(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  gegeben als

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{ |y - x| : y \in A \}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass  $\text{dist}(x, A) = 0$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn  $x \in \bar{A}$ . Zeigen Sie weiter, dass

$$|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

und folgern Sie, dass  $\text{dist}(\cdot, A)$  stetig ist.

ⓑ **Aufgabe 12.2:** (Exponentialabbildung, 6 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie damit die Lösung  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis:*  $u(t) = \exp(tA)x$  für  $t \in \mathbb{R}$ .