Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 11

Ausgabe:	Di., 11.01.2022, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 18.01.2022, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 19.01.2022 bzw. Do., 20.01.2022

Ⓑ **Aufgabe 11.1:** (Exakte Differentialgleichungen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie eine lokale Lösung $(u,\, I)$ zum Anfangswertproblem

$$e^{-t} + 2u(t)u'(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad u(0) = 1,$$

auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 11.2:** (Affin lineare Substitution, 6 Punkte)
Seien $J,\, J' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, seien $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$, sei $f : J' \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $\tau \in J^\circ$ und sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $ax + b\tau + c \in J'$. Sei $(u,\, I)$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(au(t) + bt + c), \qquad t \in J, \qquad\qquad u(\tau) = x,$$

und sei $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als $v(t) := au(t) + bt + c$ für $t \in I$. Zeigen Sie, dass $(v,\, I)$ eine lokale Lösung zu einem Anfangswertproblem ist, dass mit Hilfe der Methode der *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. Verwenden Sie diese Methode, um eine lokale Lösung $(u,\, I)$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = (u(t) + t - 1)^2, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad u(0) = 1,$$

zu bestimmen auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 11.3:** (Homogene Substitution, 6 Punkte)
Seien $J,\, J' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, so dass $0 \notin J$, sei $f : J' \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $\tau \in J^\circ$ und sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $\tau^{-1}x \in J'$. Sei $(u,\, I)$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f\Big(\frac{u(t)}{t}\Big), \qquad t \in J, \qquad\qquad u(\tau) = x,$$

und sei $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als $v(t) := t^{-1}u(t)$ für $t \in I$. Zeigen Sie, dass $(v,\, I)$ eine lokale Lösung zu einem Anfangswertproblem ist, dass mit Hilfe der Methode der *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. Verwenden Sie diese Methode, um eine lokale Lösung $(u,\, I)$ des Anfangswertproblems

$$tu'(t) = te^{u(t)/t} + u(t), \qquad t > 0, \qquad\qquad u(1) = 0,$$

zu bestimmen auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq (0,\, \infty)$.

Ⓑ **Aufgabe 11.4:** (Lokale Lipschitzbedingung, 4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $f(t,\, \cdot\,) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist für alle $t \in J$ mit Ableitung $f'(t,\, \cdot\,) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $(t,\, x) \mapsto f'(t,\, x) : J \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Zeigen Sie, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.