

Analysis II

Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 10

Ausgabe: Di., 21.12.2021, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 11.01.2022, 16:20 Uhr
Besprechung: Mi., 12.01.2022 bzw. Do., 13.01.2022

Ⓑ **Aufgabe 10.1:** (Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungen:

- (a) $u''(t) = t^2 + u(t)^3$, (b) $(u'(t) + u(t)^2)^3 = 1$,
(c) $u_1'(t) = u_2(t)$ und $u_2'(t) = -u_1(t)$, (d) $u(t) = u''(t)$,
(e) $\exp(u'(t)) + \sin(u(t)) = 1$, (f) $\cos(t)u'(t) + \exp(t)u''(t) + \sin(t)u(t) = \cosh(t)$.

Klassifizieren Sie: Ist die Gleichung linear oder nicht linear, autonom oder nicht autonom, explizit oder implizit?

Ⓑ **Aufgabe 10.2:** (Anfangswertprobleme, 4 + 4 + 4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Anfangswertprobleme jeweils eine Lösung $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem möglichst großen offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in J$ bzw. $1 \in J$.

- (a) $tu'(t) = u(t) + t^2$ für $t \in \mathbb{R}$ und $u(1) = 1$.
(b) $u'(t) = e^{u(t)} \cos(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $u(0) = 0$.
(c) $u'(t) = -e^{u(t)} \sin(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $u(0) = 0$.

Ⓑ **Aufgabe 10.3:** (Logistisches Wachstum, 6 Punkte)

Seien $\alpha, \kappa > 0$, sei $0 < x < \kappa$ und sei $u : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ eine Lösung der logistischen Wachstumsgleichung

$$u'(t) = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{\kappa}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = x.$$

Zeigen Sie, dass $v : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $v(t) := \frac{1}{u(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Differentialgleichung löst. Bestimmen Sie diese Gleichung, bestimmen Sie v und bestimmen Sie damit u .