Analysis II
Wintersemester 2021/2022
Übungsblatt 9

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 14.12.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mi., 22.12.2021, 10:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 22.12.2021 bzw. Do., 06.01.2022

Ⓑ **Aufgabe 9.1:** (Höhere partielle Ableitungen, 6 Punkte)
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := x^2 \sin(y) - z$ sämtliche partielle Ableitungen $\partial^\alpha f(x, y, z)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq 3$.

Ⓑ **Aufgabe 9.2:** (Taylorpolynome, $4 + 4$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom $\sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)(y - x)^\alpha$ zweiten Grades um den Punkt x für

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(u, v, w) := u^2 v^3 w^4$ für $u, v, w \in \mathbb{R}$ und $x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$;

(b) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u, v) := (u^v, \sin(u + v))$ für $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u > 0$ und $x = (1, 1) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 9.3:** (Lokale Extrema, $3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale Extrema, wobei

$$f(x, y) := x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - y^2, \qquad g(x, y) := (x + y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9.4: (Notwendige Bedingungen für lokale Extrema)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Weiter habe f ein lokales Minimum an der Stelle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $H_f(x)$ von f an der Stelle x positiv semidefinit ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung von f um x.