Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 8

Ausgabe:	Di., 07.12.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 14.12.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 15.12.2021 bzw. Do., 16.12.2021

Ⓑ **Aufgabe 8.1:** (Kettenregel, $6 + 6$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils $f'(x, y)$, $g'(u)$ bzw. $g'(u, v)$ und $(g \circ f)'(x, y)$ für alle u, $(v,)$ x, $y \in \mathbb{R}$, wobei

(a) $f(x, y) := e^{xy} \cos(y)$ und $g(u) := (u + 1,\ \sin(u))$ für u, x, $y \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x, y) := (x^2 - y^2,\ 2xy)$ und $g(u, v) := (u^3 - 3uv^2,\ 3u^2v - v^3)$ für u, v, x, $y \in \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 8.2:** (Homogene Funktionen, 6 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d. h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \},$$

wenn die Euler'sche Homogenitätsrelation $f'(x)x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}$ erfüllt ist.

Hinweis: Differenzieren Sie die obige Relation nach t.

Ⓑ **Aufgabe 8.3:** (Lokale Extrema, 6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass f auf jeder Geraden durch $(0, 0)$ ein lokales Minimum an der Stelle $(0, 0)$ hat, und, dass die Funktion f *kein* lokales Extremum an der Stelle $(0, 0)$ hat.

Hinweis: Es ist zu zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ die Funktion $t \mapsto f(tv) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum an der Stelle $t = 0$ hat, und, dass für jedes $\varepsilon > 0$ Stellen (ξ, η), $(\xi', \eta') \in B_\varepsilon(0, 0)$ existieren mit $f(\xi, \eta) < f(0, 0) < f(\xi', \eta')$.

Aufgabe 8.4: (Mittelwertsatz)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben als

$$f(t) := (\cos(t), \sin(t))^\mathsf{T}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie weiterhin: Sind a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann existiert kein $\eta \in (a, b)$, so dass $f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Gleichung $1 - \cos(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2$ keine Lösung $\tau > 0$ hat.