Analysis II
Wintersemester 2021/2022
Übungsblatt 7

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 30.11.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 07.12.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 08.12.2021 bzw. Do., 09.12.2021

Ⓑ **Aufgabe 7.1:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, $3+3+4$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Ableitung; bestimmen Sie in Teil (c) außerdem $\det h'(\rho,\,\lambda,\,\phi)$.

(a) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben als

$$f(x,\,y,\,z) := (x(e^y + e^{-z}),\; x(e^y - e^z)), \qquad\qquad x,\,y,\,z \in \mathbb{R}.$$

(b) $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $g(x,\,y) = |(x,\,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ für $x,\,y \in \mathbb{R}$.

(c) $h:(0,\,\infty)\times(-\pi,\,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$h(\rho,\,\lambda,\,\phi) := (\rho\cos(\lambda)\cos(\phi),\; \rho\sin(\lambda)\cos(\phi),\; \rho\sin(\phi)), \qquad \rho>0,\; |\lambda|<\pi,\; |\phi|<\tfrac{\pi}{2}.$$

Ⓑ **Aufgabe 7.2:** (Richtungsableitungen und Differenzierbarkeit, $4+4$ Punkte)
Die Funktionen $f,\,g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien gegeben als $f(0,\,0) = g(0,\,0) = 0$ und

$$f(x,\,y) = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2+y^2}, \qquad g(x,\,y) = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0,\,0)\,\}.$$

Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ existieren die Richtungsableitungen $\partial_v f(0,\,0)$ bzw. $\partial_v g(0,\,0)$? Sind f bzw. g differenzierbar an der Stelle $(0,\,0)$?

Ⓑ **Aufgabe 7.3:** (Differenzierbarkeit und Richtungsableitungen, 4 Punkte)
Seien $m,\,n \in \mathbb{N}$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $x \in D^\circ$ und sei $f:D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar an der Stelle x. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\,0\,\}$ existiert mit $\partial_v f(x) = f'(x)v$.

Hinweis: Proposition 2.4.7 (b) darf hier nicht verwendet werden.

Aufgabe 7.4: (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit)
Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $x \in D^\circ$, sei $U \subseteq D$ eine Umgebung von x und sei $f:D \longrightarrow \mathbb{C}$ partiell differenzierbar in U mit beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_1 f,\,\dots,\,\partial_n f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist an der Stelle x.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (in einer reellen Variablen).