Analysis II
Wintersemester 2021/2022

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 6

Ausgabe:	Di., 23.11.2021, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 30.11.2021, 16:20 Uhr
Besprechung:	Mi., 01.12.2021 bzw. Do., 02.12.2021

Ⓑ **Aufgabe 6.1:** (Banach'scher Fixpunktsatz, $3+3$ Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + 7x - 1 = 0$ genau eine Lösung $x \in [0,\, 1]$ hat.

(b) Sei $g : [0,\, \infty) \longrightarrow [0,\, \infty)$ gegeben als $g(x) := x + \frac{1}{1+x}$ für $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|, \qquad x,\, y \geq 0,$$

und, dass g keinen Fixpunkt in $[0,\, \infty)$ hat.

Ⓑ **Aufgabe 6.2:** (Kompakte Mengen, 4 Punkte)
Seien $(X,\, \mu)$ ein metrischer Raum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie nicht-leerer, kompakter Teilmengen von X mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \varnothing$.

Ⓑ **Aufgabe 6.3:** (Partielle Differenzierbarkeit, 6 Punkte)
Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,\, y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie ggf. die partiellen Ableitungen.

Ⓑ **Aufgabe 6.4:** (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Aufgabe 5.2, d. h.

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0), \end{cases} \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist in $\mathbb{R}^2$, und, dass die partiellen Ableitungen $\partial_x f,\, \partial_y f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in keiner Umgebung von $(0,\, 0)$ beschränkt sind.